Math. P.
25 ud

Math. P.

Baur

25 vol

SYNTHETISCHE EINTEILUNG

DER

EBENEN LINIEN III. ORDNUNG

VON

DR. MORITZ BAUR

PROFESSOR AM K. REALGYMNASIUM ZU STUTTGART

MIT 24 FIGUREN IM TEXT UND 6 LITH. TAFELN

STUTTGART

J. B. METZLER'SCHE BUCHHANDLUNG

1888

21/85

566 B

2.80

SYNTHETISCHE EINTEILUNG

DER

EBENEN LINIEN III. ORDNUNG

VON

DR. MORITZ BAUR

PROFESSOR AM K. REALGYMNASIUM ZU STUTTGART

STUTTGART

J. B. METZLER'SCHE BUCHHANDLUNG

1888

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Druck der J. B. Metzlerschen Buchdruckerei in Stuttgart.

Synthetische Einteilung der ebenen Linien III. Ordnung.

Einleitung.

Eine Einteilung der ebenen Linien III. Ordnung finden wir zuerst bei *Newton* in seiner „Enumeratio linearum tertii ordinis (1706)“, dann bei *Euler* in seiner „Introductio in Analysin infinitorum (1748)“ und bei *Plücker* in seinem „System der analytischen Geometrie (1835). Alle diese Einteilungen sind aber wesentlich von analytischen Gesichtspunkten aus aufgestellt und kommen deshalb hier nicht weiter in Betracht. Doch verdankt man Newton auch den für eine rein geometrische Einteilung wichtigsten Satz, dass nämlich sämtliche Linien III. Ordnung als Zentralprojektionen von fünf derselben, der sogenannten divergierenden Parabeln, aufgefasst werden können. *Newton* hat diesen Satz in dem seiner Aufzählung der 72 Arten von Linien III. Ordnung unmittelbar folgenden Abschnitt „Genesis curvarum per umbras“, allerdings ohne Beweis, aufgestellt. In Übereinstimmung mit *Newton* stellte *Möbius* in seiner Abhandlung über die Grundformen der Linien III. Ordnung*) fünf Grundformen der sphärischen, und damit auch fünf Hauptgattungen der ebenen Linien III. Ordnung auf. *Möbius* untersucht nämlich zuerst die allgemeinen geometrischen Eigenschaften der sphärischen Linien als Projektionen von ebenen algebraischen Linien und insbesondere diejenigen der sphärischen Linien III. Ordnung und entwickelt dann auf analytische Weise durch einen ihm eigentümlichen sphärischen Algorithmus die Haupteigenschaften und Grundformen der genannten Linien noch näher. Durch Rückprojektion der sphärischen Linien auf Ebenen ergeben sich dann die Hauptgattungen der ebenen Linien III. Ordnung und ihre Eigenschaften. Auf die Einteilung der Gattungen in einzelne Arten lässt sich *Möbius* nicht ein.

*) Abhandlungen der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Band I, Leipzig 1852.

In der vorliegenden Abhandlung ist nun der Versuch gemacht, unter Voraussetzung einiger bekannten Eigenschaften der Linien III. Ordnung zunächst den *Newton*schen Satz zu beweisen und dann nach *Möbius'* Vorgang die allgemeinen Eigenschaften der sphärischen Linien III. Ordnung und ihre Grundformen zu entwickeln und diese dann dadurch näher zu bestimmen, dass diese sphärischen Linien speziell als Projektionen von divergierenden Parabeln auf eine Kugel aufgefasst werden. Durch Rückprojektion der sphärischen Hauptformen auf passend gewählte Ebenen werden sodann die einzelnen Arten der ebenen Linien III. Ordnung unterschieden. Zum Schluss wird die gefundene Einteilung mit der *Newton*schen verglichen.

§ 1.

Der Newtonsche Satz und seine Begründung.

1. Newton hat den schönen Satz, dass sämtliche Linien III. Ordnung als Zentralprojektionen von fünf derselben, der sogenannten divergierenden Parabeln, angesehen werden können, ohne allen Beweis, ja ohne alle Andeutung der von ihm befolgten Methode ausgesprochen. Der Beweis dieses Satzes, aus welchem sich unmittelbar eine Einteilung der Linien III. Ordnung in fünf Hauptgruppen ergiebt, galt lange als eines der schwierigsten Probleme. Wie *Chasles**) zuerst bemerkte, hat der Satz seinen wahren Grund in einigen auf die Wendepunkte sich beziehenden Eigenschaften der Linien III. Ordnung, mit Hilfe deren er sich sehr einfach ableiten lässt.

2. Um aber nicht zu sehr von dem eigentlichen Gegenstand unserer Untersuchung abzukommen, sei es gestattet, einige hierher gehörigen Sätze aus der Theorie der Linien III. Ordnung als bekannt ohne Beweis aufzuführen:**)

a) Jede Linie III. Ordnung hat entweder Einen oder drei (reelle) Wendepunkte und in letzterem Falle liegen dieselben in gerader Linie.

b) Dreht sich um einen Wendepunkt w eine Transversale, welche die Kurve in zwei Punkten a, b schneidet, so ist der geometrische Ort desjenigen Punktes u der Transversale, welcher dem Punkt w harmonisch konjugiert ist in Beziehung auf a und b, eine Gerade, die harmonische Polare des Wendepunktes w.

c) Die harmonische Polare eines Wendepunkts w geht durch die Berührungspunkte der drei Tangenten, welche man im allgemeinen von diesem Wendepunkt aus an die Kurve ziehen kann, sowie durch die Schnittpunkte der Tangenten, welche man in den

---

*) *Chasles-Sohnke,* Geschichte der Geometrie, Halle 1839. Note XX.

**) Vergleiche hierüber z. B. *Durège,* die ebenen Curven III. Ordnung, Leipzig 1871. Art. 341—344. 360—365. 372. 373.

jeweiligen Schnittpunkten a und b einer um w sich drehenden Transversale an die Kurve ziehen kann.

d) Die Tangenten in zwei Wendepunkten w und w' schneiden sich auf der harmonischen Polare des dritten Wendepunkts w'', welcher mit w und w' in gerader Linie liegt.

e) Die harmonischen Polaren der drei Wendepunkte schneiden sich in Einem Punkt, dem sogenannten Zentralpunkt der Kurve.

3. Mit Hilfe dieser Sätze ergiebt sich zunächst folgendes:

Projiziert man irgend eine Linie III. Ordnung von einem beliebigen Punkt des Raums aus so auf eine Ebene, dass ein Wendepunkt der Kurve in der Projektion unendlich fern fällt, so wird sich die Tangente in diesem Wendepunkt als eine Asymptote der Kurve projizieren und die harmonische Polare dieses Wendepunkts als ein Durchmesser für alle Sehnen, welche in diesem Wendepunkt konvergieren und also in der Projektion parallel sind.

Hieraus erkennt man, wie Durchmesser bei den Linien III. Ordnung auftreten können.

Projiziert man aber eine Linie III. Ordnung so auf eine Ebene, dass nicht bloss ein Wendepunkt, sondern auch die Tangente in demselben in der Projektion ins Unendliche fällt, so hat die Kurve in der Projektion keine Asymptote mehr, sondern ist parabolischer Natur. Die harmonische Polare des unendlich fernen Wendepunkts ist wiederum, wie vorhin, ein Durchmesser der parallelen, in diesem unendlich fernen Wendepunkt konvergierenden Sehnen.

Da nun nach 2. a) jede Linie III. Ordnung mindestens Einen Wendepunkt besitzt, so ist hiemit bewiesen, dass jede Linie III. Ordnung in eine parabolische Kurve mit einem Durchmesser projiziert werden kann, woraus dann umgekehrt folgt, dass alle Linien III. Ordnung als Zentralprojektionen von parabolischen Kurven angesehen werden können, wobei die Frage, wie viele solcher parabolischen Kurven, oder, wie wir sie fortan nennen wollen, divergierender Parabeln es giebt, vorläufig noch offen bleibt.

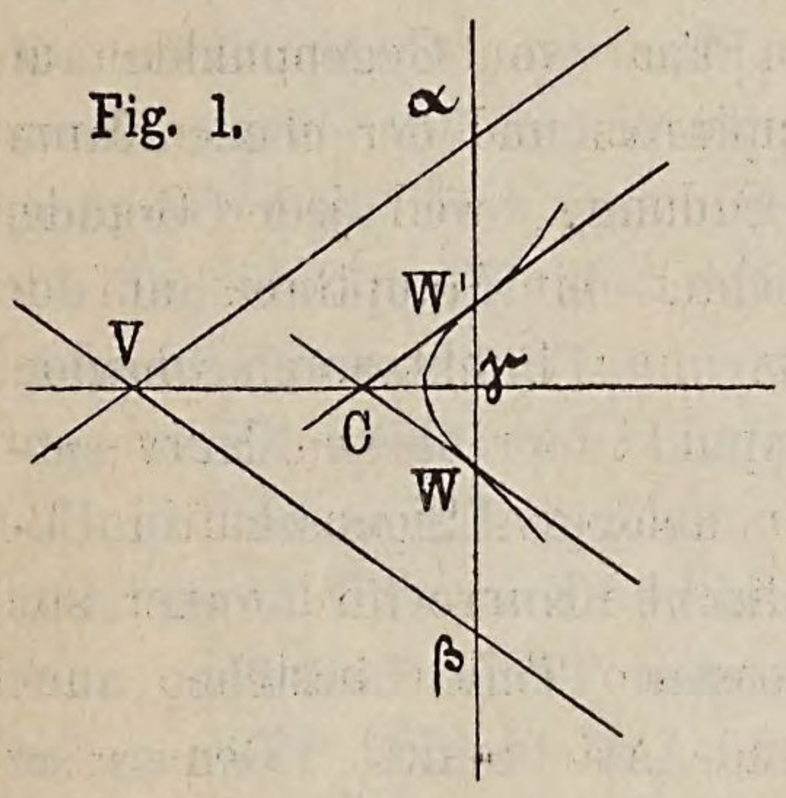
4. Projiziert man dagegen eine Linie III. Ordnung so auf eine Ebene, dass die harmonische Polare eines Wendepunktes w im Unendlichen verschwindet, so wird die Projektion von w ein Mittelpunht der Kurve. Denn für jede durch w gezogene Sehne, welche die Kurve in a und b und die harmonische Polare von w in u schneidet, fällt in der Projektion u unendlich fern und daher w in die Mitte von $a\,b$. Man kann daher auch jede Linie III. Ordnung so projizieren, dass die Projektion einen Mittelpunkt erhält.*)

---

*) Auch dieser Satz stammt von *Chasles*. Vergl. *Chasles-Sohnke*, Geschichte der Geometrie, Note XX.

5. Nach den in 2. angeführten Sätzen ergiebt sich uns folgende einfache Konstruktion des Zentralpunkts bei einer divergierenden Parabel mit drei Wendepunkten W, W', W'' (von denen W'' der unendlich ferne Punkt der WW' ist): die harmonische Polare von W'' (Fig 1.) geht durch die Mitte γ von WW' und durch den Schnittpunkt C der Tangenten in W und W'. Die harmonische Polare von W geht ebenso durch den Schnittpunkt der Tangente in W' mit der unendlich fernen Tangente in W'', d. h. sie ist parallel CW' und schneidet die Gerade, auf welcher die Wendepunkte liegen, so in einem Punkt α, dass $WW'\alpha W''$ vier harmonische Punkte sind, es muss also W' die Mitte von $W\alpha$ sein oder man erhält die Polare von W, indem man $W'\alpha = WW'$ abträgt und durch α eine Parallele mit CW' zieht. Ganz ebenso ist die harmonische Polare von W' parallel CW und schneidet auf der Geraden durch die Wendepunkte eine Strecke $W\beta = WW'$ ab. Die drei harmonischen Polaren der drei Wendepunkte schneiden sich dann in dem gesuchten Zentralpunkt V.

Fig. 1.



§ 2.

Sphärische Linien als Projektionen von ebenen algebraischen Linien. — Allgemeine Eigenschaften der sphärischen Linien.*)

6. Um die einzelnen Arten divergierender Parabeln und damit die einzelnen Arten der Linien III. Ordnung überhaupt kennen zu lernen, denken wir uns nach *Möbius'* Vorgang diese Linien derart auf eine Kugelfläche projiziert, dass der Kugelmittelpunkt das Projektionszentrum ist. Man erreicht hiedurch den grossen Vorteil, stets geschlossene sphärische Linien zu erhalten, deren Eigentümlichkeiten viel leichter zu übersehen sind, als dies bei ebenen Kurven der Fall ist, welche durch die ins Unendliche laufenden Äste oft vielfach zerrissen und verzerrt erscheinen. Die Rückprojektion einer sphärischen Linie auf beliebige Ebenen giebt dann lauter kollineäre Kurven, welche zu derselben Gattung gehören.

---

*) Dieser und der folgende Paragraph sind im Wesentlichen der oben schon erwähnten Abhandlung von *Möbius* über die Grundformen der Linien III. Ordnung § 1—19 entnommen.

Wir wollen nun zunächst die allgemeinen Eigenschaften der sphärischen Linien als Projektionen von ebenen algebraischen Linien untersuchen.

7. Hat man in einer Ebene irgend eine algebraische Linie n ter Ordnung und projiziert dieselbe von einem beliebigen Punkt O des Raumes aus auf eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt dieser Punkt O ist, so entspricht jedem Punkt der ebenen Kurve ein Paar von Gegenpunkten auf der Kugel, jeder Geraden der Ebene ein Hauptkreis und der ebenen Kurve n ter Ordnung eine sphärische Kurve n ter Ordnung, weil jeder Geraden, welche die ebene Kurve in n Punkten schneidet, ein Hauptkreis auf der Kugel entspricht, welcher die sphärische Kurve in n Punktpaaren schneidet. Jedem Wendepunkt, Doppel- oder Rückkehrpunkt der ebenen Kurve entspricht ein Paar von Gegenpunkten von der analogen Eigenschaft in Beziehung auf die sphärische Kurve. Die sphärische Kurve wird ferner stets geschlossen sein oder aus mehreren geschlossenen Teilen bestehen, auch wenn die ebene Kurve ins Unendliche laufende Äste besitzt. Denn es sei A der unendlich ferne Punkt eines solchen Astes einer ebenen Kurve l, so besteht die Projektion von A auf die Kugelfläche in einem Paar von Gegenpunkten α, α' auf demjenigen Hauptkreis der Kugel, welcher der Ebene der l parallel ist. Aber in dem Punktpaar α, α' kann die sphärische Kurve λ nicht aufhören; denn projiziert man zunächst von O aus die ebene Kurve l auf irgend eine andere Ebene nach l_1, so wird die Projektion des unendlich fernen Punktes A ein im Endlichen liegender Punkt A_1 sein, in welchem nach dem Gesetz der Stätigkeit die ebene Kurve l_1 nicht aufhören kann; es wird daher auch die sphärische Kurve λ, als Projektion von l_1 aufgefasst, in α, α' nicht abbrechen können. Eine sphärische Kurve aber, welche in einem Punkt nicht abbrechen kann, muss nothwendig geschlossen sein, da der andere denkbare Fall, dass die Kurve in unendlich vielen Windungen sich spiralartig einem Punkte nähere, durch die Voraussetzung einer algebraischen Kurve l ausgeschlossen ist.

8. Bei den sphärischen Kurven haben wir nun zweierlei Arten zu unterscheiden, nämlich die einfachen Kurven, d. h. solche in sich zurücklaufende Kurven, welche von jedem ihrer Punkte zugleich dessen Gegenpunkt mit enthalten, und die Zwillingskurven, welche aus zwei getrennten Teilen bestehen, von denen jeder die Gegenkurve des andern bildet. (Als einfachste Beispiele für diese zwei Arten von sphärischen Kurven dienen ein Hauptkreis und ein Paar paralleler, gleich grosser Kreise auf der Kugelfläche.)

9. Die einfachen sphärischen Kurven haben folgende allgemeine Eigenschaften:

a) Eine einfache Kurve wird von jedem auf ihr sich befindenden Paar von Gegenpunkten in zwei gleiche, ähnliche, aber im allgemeinen nicht kongruente, Hälften geteilt. Denn dreht sich ein Durchmesser AA' der Kugel um deren Mittelpunkt O so, dass sein einer Endpunkt den sphärischen Kurvenbogen AA' durchläuft und sein anderer Endpunkt den Gegenbogen $A'A$, so beschreiben hiebei die Halbmesser OA und OA' Kegelflächen, von denen die eine die Scheitelkegelfläche der anderen ist. Zwei solcher Kegelflächen sind aber bekanntlich im allgemeinen nur symmetrisch aber nicht kongruent.

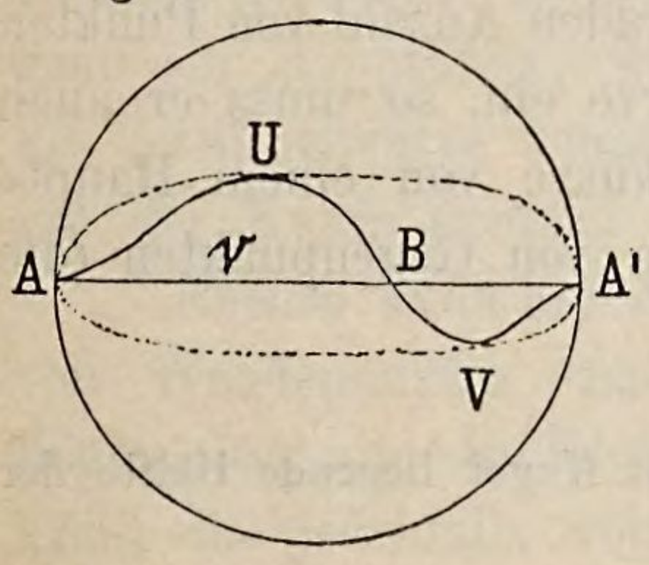
b) Jeder Hauptkreis der Kugel schneidet eine einfache Kurve mindestens in Einem Paar von Gegenpunkten; denn irgend ein Paar von Gegenpunkten der Kurve liegt, wenn es nicht auf dem Hauptkreis selbst liegt, auf verschiedenen Seiten desselben.

c) Ein Hauptkreis schneidet eine einfache Kurve in 1, 3, 5 . . . überhaupt in einer ungeraden Anzahl von Paaren von Gegenpunkten. Denn sind z. B. A, A'; B, B'; C, C'; D, D' . . . die Paare von Gegenpunkten, in welchen ein Hauptkreis die Kurve schneidet, so liegen die Bögen AB, BC, CD, . . . abwechslungsweise auf der einen und andern Seite des Hauptkreises, und wenn z. B. AB oberhalb des Hauptkreises liegt, so liegt der Gegenbogen $A'B'$ unterhalb desselben; dies ist aber nur möglich, wenn zwischen A und A' eine gerade Anzahl von Durchgangspunkten und also im Ganzen eine ungerade Anzahl von Paaren von Gegenpunkten vorhanden ist, in welchen der Hauptkreis die Kurve schneidet.

d) Eine einfache Kurve (wofern sie nicht mit einem Hauptkreis zusammenfällt) hat stets eine ungerade Anzahl von Paaren von Wendepunkten und zwar mindestens drei, wofern sie nicht ein Paar von Doppelpunkten oder Rückkehrpunkten besitzt; in letzterem Falle hat die Kurve mindestens Ein Paar von Wendepunkten.

Denn es sei ν ein Hauptkreis, welcher eine einfache sphärische Kurve in dem Paar von Gegenpunkten A, A' berührt, so dass also die Kurventeile bei A und A' auf verschiedenen Seiten von ν liegen, dann muss nach c) der Hauptkreis ν die Kurve mindestens noch in Einem Paar von Gegenpunkten B, B' schneiden. Denkt man sich nun die Ebene des Hauptkreises ν senkrecht zur Ebene des Papiers, so dass sich ν als der Durchmesser AA' der Kugel projiziert (Fig. 2) und dreht man um den Durchmesser AA' einen Hauptkreis, bis er den oberhalb ν liegenden Kurvenbogen AB in U berührt und dann nach der andern Seite bis er

Fig. 2.



den unterhalb ν liegenden Bogen BA' in V berührt*), so kehrt die Kurve in A dem Hauptkreis ν ihre konvexe, in U ihre konkave Seite zu, es muss also zwischen A und U ein Wendepunkt liegen. Ganz ebenso verhält es sich hinsichtlich des Bogens VA'. Aber auch zwischen U und V muss noch ein Wendepunkt liegen, denn sowohl in U als in V kehrt die Kurve ihre konkave Seite dem Kreise ν zu, während U und V auf verschiedenen Seiten von ν liegen. Die Kurve hat daher mindestens drei Paare von Wendepunkten.

Hat aber die sphärische Kurve ein Paar von Doppelpunkten oder Rückkehrpunkten, so zeigt ein Blick auf Fig. 3 und Fig. 4, dass dann

Fig. 3.

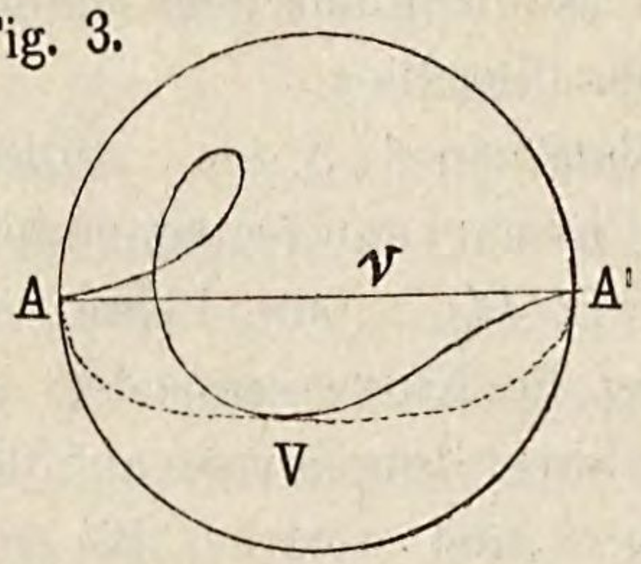
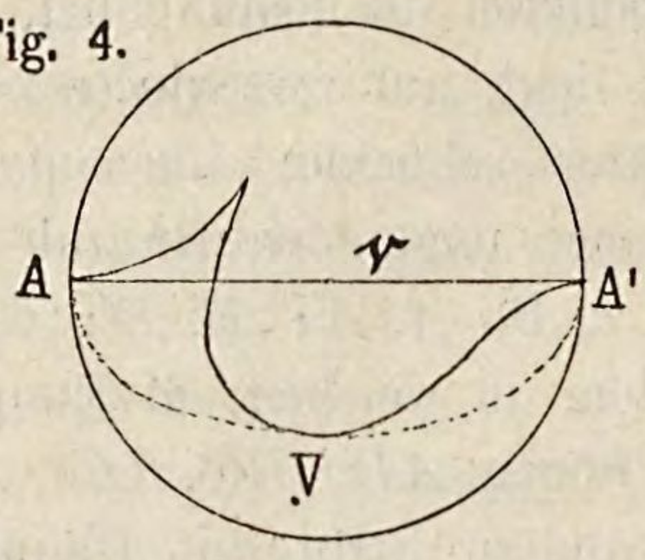


Fig. 4.



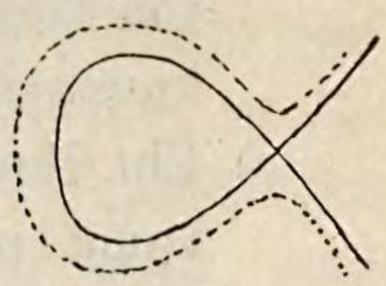
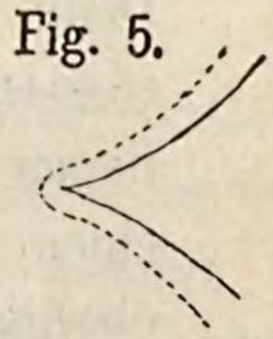


Fig. 5.



mindestens Ein Wendepunkt zwischen V und A' vorhanden sein muss, also mindestens Ein Paar von Wendepunkten auf der ganzen sphärischen Kurve. Ein Doppelpunkt und ein Rückkehrpunkt vertritt also zwei Wendepunkte, und aus Fig. 5 ist ersichtlich, wie durch Zusammentreten zweier Wendepunkte ein Doppelpunkt oder Rückkehrpunkt entstehen kann.

10. Der anderen Art der sphärischen Kurven, den Zwillingskurven, kommen folgende allgemeine Eigenschaften zu:

a) Ist A ein Punkt auf dem einen der beiden Teile einer Zwillingskurve, so liegt sein Gegenpunkt A' auf dem andern Teil. Ein Bogen AB der einen Kurve ist seinem Gegenbogen $A'B'$ gleich und ähnlich, aber im allgemeinen nicht kongruent, und dasselbe gilt hinsichtlich der zwei Gegenkurven im ganzen.

b) Da ein Hauptkreis eine geschlossene, nicht einfache, sphärische Kurve entweder gar nicht oder in einer geraden Anzahl von Punkten schneidet (denn tritt der Kreis in die Kurve ein, so muss er auch wieder austreten), so wird eine Zwillingskurve von einem Hauptkreis in einer geraden Anzahl von Paaren von Gegenpunkten (die Null eingeschlossen), geschnitten.

---

*) Es genügt, nur die auf der vorderen Seite der Kugel liegende Hälfte der Kurve zu betrachten.

c) Durchläuft ein Punkt eine geschlossene, nicht einfache sphärische Kurve, und hat derselbe in irgend einem Anfangspunkt die konkave Seite der Kurve z. B. rechts, so wird er nach vollständiger Durchlaufung der Kurve die konkave Seite wiederum rechts haben, er muss also entweder gar keinen Wendepunkt oder eine gerade Anzahl von Wendepunkten passiert haben. Daher hat eine Zwillingskurve entweder gar keinen Wendepunkt oder eine gerade Anzahl solcher.

§ 3.

Die sphärischen Linien III. Ordnung als Projektionen von ebenen Linien III. Ordnung.

11. Einer sphärischen Linie III. Ordnung, als Projektion einer ebenen Linie derselben Ordnung, kommt die charakteristische Eigenschaft zu, dass irgend ein Hauptkreis der Kugel, als Projektion einer Geraden, entweder Drei Paare von Gegenpunkten mit ihr gemein hat oder nur Ein solches Paar.

Ein die sphärische Kurve in einem Paar von Gegenpunkten berührender Hauptkreis schneidet daher dieselbe stets noch in einem Paar von Gegenpunkten und kann sie in diesem nicht auch wieder berühren. Berührt aber ein Hauptkreis die sphärische Kurve in einem Paar von Wendepunkten, oder in einem Paar von Doppel- oder Rückkehrpunkten, so hat er mit der Kurve kein weiteres Paar von Gegenpunkten gemein.

12. Da nach dem früheren (9.) eine einfache sphärische Kurve von einem Hauptkreis wenigstens in Einem, oder auch in 3, 5 . . . Paaren von Gegenpunkten geschnitten wird, eine Zwillingskurve (10.) aber in einer geraden Anzahl von Gegenpunkten (die Null eingeschlossen), so muss eine sphärische Linie III. Ordnung entweder durch eine einfache Kurve allein, oder durch eine einfache Kurve und eine Zwillingskurve zugleich dargestellt sein (wobei die Zwillingskurve auch durch ein Paar isolierter Punkte vertreten sein kann).

Hat die sphärische Linie III. Ordnung ein Paar von Doppel- oder Rückkehrpunkten, so kann sie von keiner Zwillingskurve begleitet sein, denn ein Hauptkreis, welcher durch dieses Paar von Punkten ginge und die Zwillingskurve schneiden würde, hätte vier Paare von Gegenpunkten mit der Kurve gemein.

Ebenso kann auf der etwa vorhandenen Zwillingskurve weder ein Paar von Wendepunkten, noch ein Paar von Doppel- oder Rückkehrpunkten liegen, weil ein die Kurve in einem solchen Punktpaar berührender Hauptkreis die jedenfalls vorhandene einfache Kurve noch in einem Paar von

Gegenpunkten schneiden müsste und dann vier Paare von Gegenpunkten mit der Kurve gemein hätte.

Endlich kann auf der einfachen Kurve höchstens ein Paar von Doppel- oder Rückkehrpunkten liegen, weil ein durch zwei solcher Punktpaare gelegter Hauptkreis vier Paare von Schnittpunkten mit der Kurve aufweisen würde.

Der bei einer sphärischen Linie III. Ordnung jedenfalls vorhandenen einfachen Kurve kommen (9. d) mindestens drei Paare von Wendepunkten, oder falls sie ein Paar Doppel- oder Rückkehrpunkte hat, mindestens Ein Paar von Wendepunkten zu. Nun aber hat (2. a) eine ebene Linie III. Ordnung drei in gerader Linie liegende Wendepunkte; daraus schliessen wir, dass auch einer sphärischen Linie III. Ordnung nicht mehr als drei Paare von Wendepunkten zu kommen und dass dieselben auf einem Hauptkreis, dem Wendekreis, liegen. Fasst man einen Doppel- oder Rückkehrpunkt als durch das Zusammentreten zweier Wendepunkte entstanden auf (9. d), so ist ersichtlich, dass eine sphärische Linie III. Ordnung, welche ein Paar von Doppel- oder Rückkehrpunkten besitzt, nur noch Ein Paar von Wendepunkten haben kann, und dass diese beiden Paare von Punkten auf einem Hauptkreis der Kugel liegen, welcher den Wendekreis vertritt.

13. Es ergeben sich daher für die sphärischen Linien III. Ordnung folgende fünf mögliche Hauptformen, man hat:

1) eine einfache Kurve mit drei auf einem Hauptkreis liegenden Paaren von Wendepunkten und eine Zwillingskurve;
2) eine einfache Kurve mit drei Paaren von Wendepunkten und ein Paar isolierter Punkte;
3) eine einfache Kurve allein mit drei Paaren von Wendepunkten;
4) eine einfache Kurve mit einem Paar von Doppelpunkten und einem Paar von Wendepunkten;
5) eine einfache Kurve mit einem Paar von Rückkehrpunkten und einem Paar von Wendepunkten.

14. Um von diesen fünf möglichen Hauptformen der sphärischen Linien III. Ordnung eine Anschauung zu bekommen, mache man bei den drei ersten von den drei Hauptkreisen, welche die sphärische Kurve in den drei Paaren von Wendepunkten FF', GG', HH' berühren, eine stereographische Projektion auf die Ebene des Wendekreises von einem der beiden sphärischen Mittelpunkte dieses Kreises aus. Da bei der stereographischen Projektion sich jeder Kreis auf der Kugel wieder als Kreis projiziert, so werden der Wendekreis und die Berührungskreise in den drei Paaren von Wendepunkten die ganze Projektionsebene in vier Paare krummliniger Dreiecke und in drei Paare krummliniger Vierecke teilen

und die einfache sphärische Kurve muss sich dann entweder durch die sechs beiderseits an den Wendekreis grenzenden Dreiecke oder durch die sechs beiderseits am Wendekreis liegenden Vierecke hinziehen, weil sie ausser den drei Paaren von Wendepunkten keine andern Punkte mit den drei berührenden Hauptkreisen gemein haben kann. Dabei fallen diejenigen Teile der sphärischen Kurve, welche auf der Kugel oberhalb oder unterhalb des Wendekreises liegen, in der Projektion ausserhalb oder innerhalb des Wendekreises und so erhält man die beiden typischen Figuren 6 und 7.

Fig. 6.

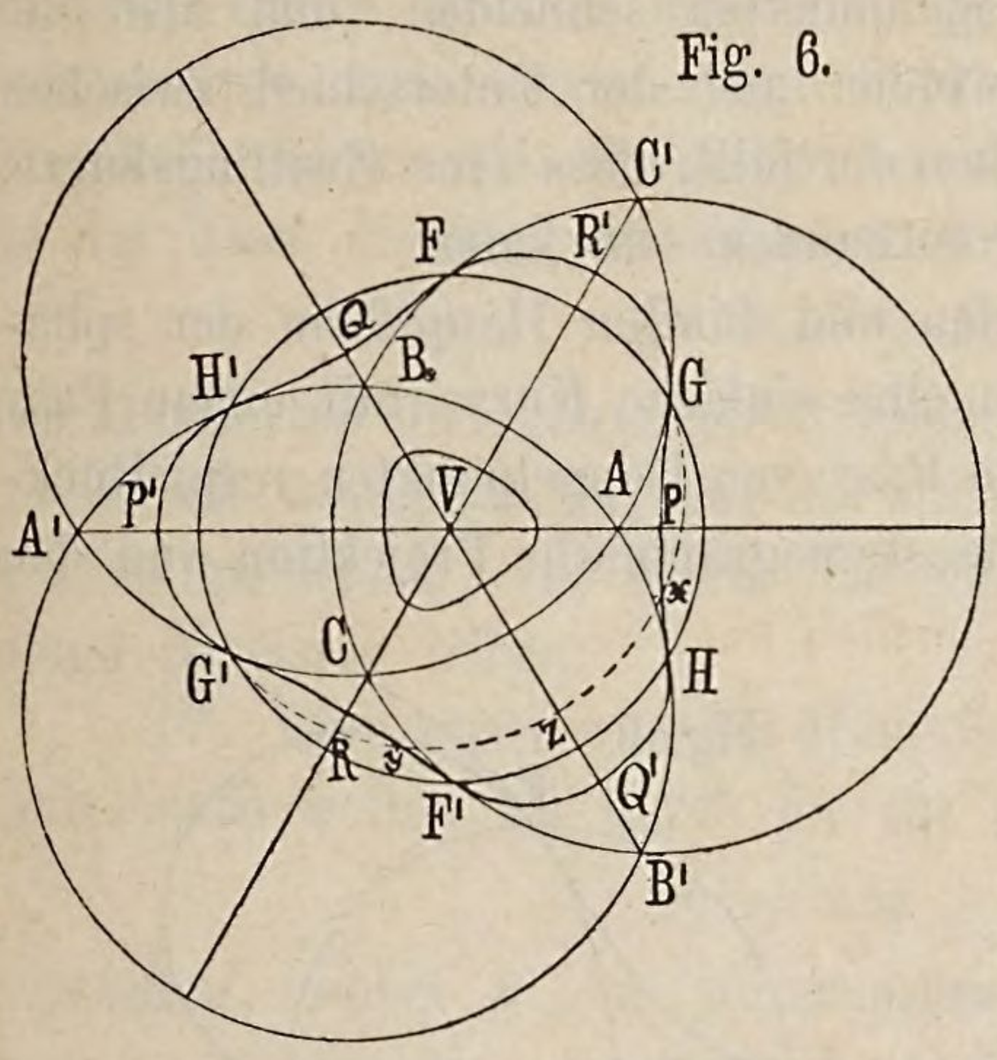
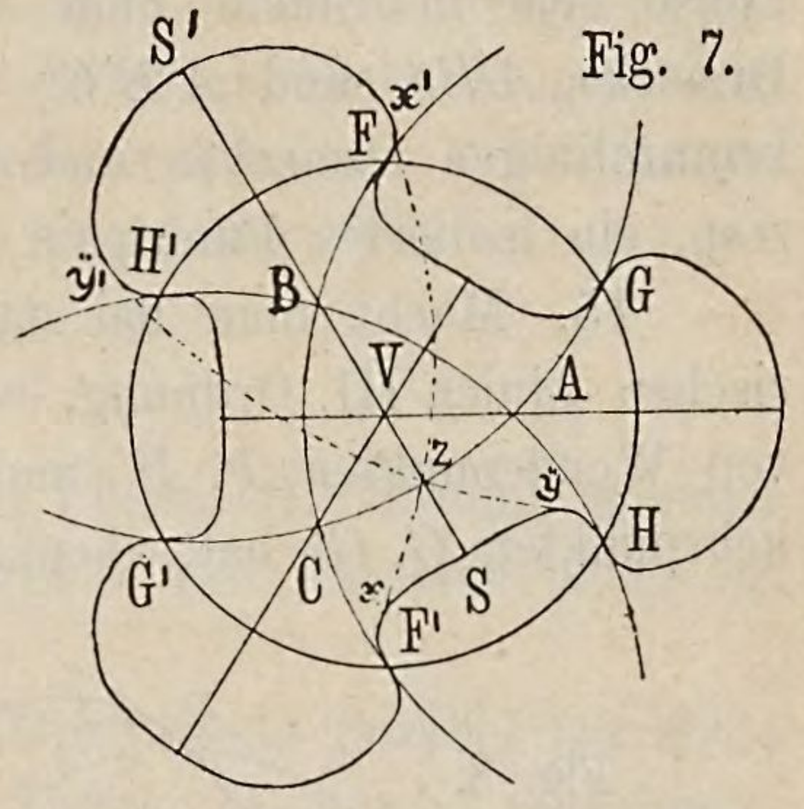


Fig. 7.



Hat die sphärische Linie III. Ordnung noch eine Zwillingskurve (oder als Grenze einer solchen ein Paar isolierter Punkte), so muss sich in der stereographischen Projektion die eine Hälfte der Zwillingskurve als ein innerhalb des von den Wendeberührungskreisen gebildeten Dreiecks ABC liegendes Oval (resp. als isolierter Punkt)*) darstellen, und eine solche Zwillingskurve ist überhaupt nur möglich, wenn sich die einfache Kurve durch die sechs am Wendekreis liegenden Dreiecke hinzieht. Denn es ist aus Fig. 6 ersichtlich, dass wenn das Oval nicht in dem Dreieck ABC, sondern z. B. in den Gegendreiecken AGH und $A'G'H'$ läge, es dann immer durch G, G' gehende Kreise als Projektionen von Hauptkreisen auf der Kugel geben würde, welche sowohl das Oval als die einfache Kurve ausser in G, G' noch schneiden würden und also mehr als drei Paare von Gegenpunkten mit der Kurve gemein hätten. Ebenso wenn das Oval innerhalb eines Vierecks, z. B. $ABFG$ läge, würde es durch H, H' gehende

*) In Fig. 6 ist nur die eine Hälfte der Zwillingskurve gezeichnet, welche innerhalb des Dreiecks ABC liegt, die andere würde über das Gegendreieck $A'B'C'$ hinausfallen.

Hauptkreise geben, welche mehr als drei Paare von Gegenpunkten mit der Kurve gemein hätten. In ganz ähnlicher Weise sieht man aber, dass, falls die einfache Kurve sich durch die sechs beiderseits am Wendekreis liegenden Vierecke hinzieht, ein Oval weder in den drei Paaren von Dreiecken, noch in den drei Paaren von Vierecken am Wendekreis liegen kann, aber auch nicht in dem Dreieck ABC, weil es dann stets Hauptkreise geben würde, welche mehr als drei Paare von Schnittpunkten mit der Kurve hätten. Ebenso überzeugt man sich in dem besonderen Fall, wo die drei die sphärische Kurve in den Wendepunkten berührenden Hauptkreise sich in Einem Paar von Gegenpunkten schneiden, und also die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ verschwinden und der Unterschied zwischen krummlinigen Dreiecken und Vierecken fortfällt, dass eine Zwillingskurve, resp. ein isoliertes Punktpaar, nicht vorhanden sein kann.

15. Macht man bei der vierten und fünften Hauptform der sphärischen Linien III. Ordnung, wo man eine einfache Kurve mit einem Paar von Wendepunkten F, F' und einem Paar von Doppelpunkten resp. Rückkehrpunkten G, G' hat, ebenfalls eine stereographische Projektion von den

Fig. 8.

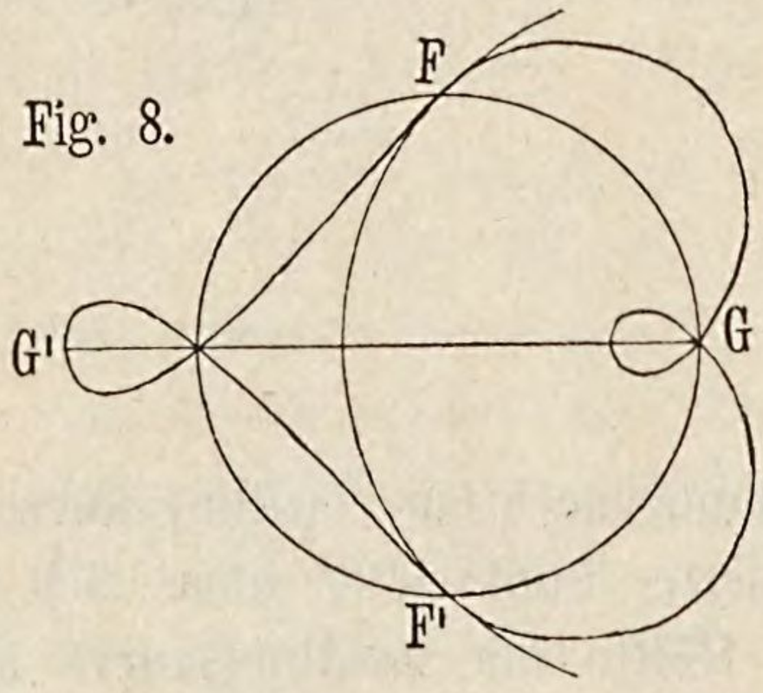
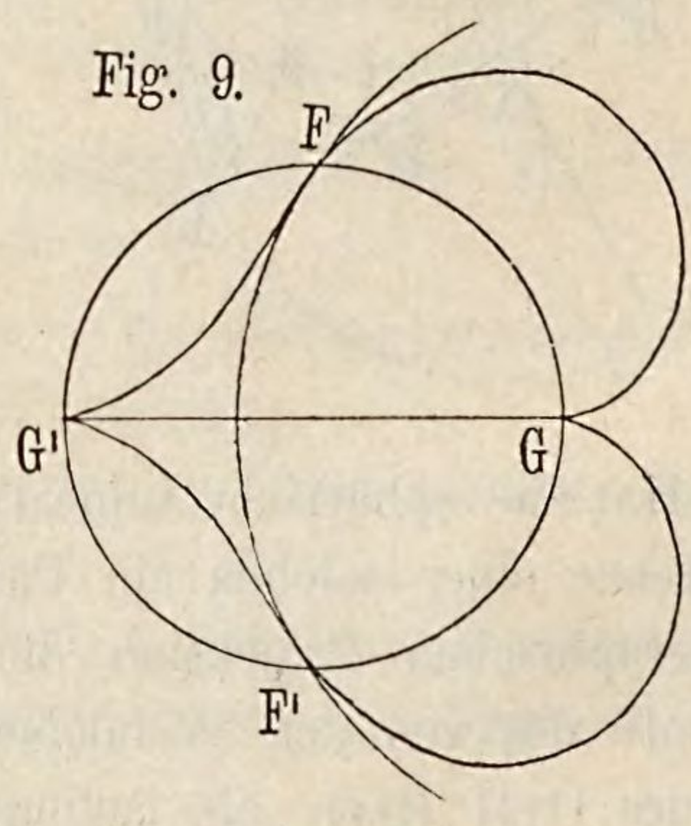


Fig. 9.



Hauptkreisen, welche die Kurve in den genannten Punktpaaren berühren, und zwar auf die Ebene desjenigen Hauptkreises, welcher durch das Paar von Wendepunkten und Doppel- oder Rückkehrpunkten geht, so ergeben sich als typische Gestalten der vierten und fünften Hauptform die Figuren 8 und 9.

§ 4.

Die fünf divergierenden Parabeln.

16. Im Vorhergehenden haben wir fünf mögliche Hauptformen der sphärischen Linien III. Ordnung gefunden und ihre typische Gestalt erkennen können. Projizieren wir diese fünf Hauptformen je auf eine Ebene

zurück, welche parallel ist der Ebene eines Hauptkreises, welcher die sphärische Kurve in einem Paar von Wendepunkten berührt, so erhalten wir, ganz nach denselben Schlüssen wie in (3.), als Projektionen parabolische Kurven mit einem unendlich fernen Wendepunkt; bei den drei ersten Hauptformen hat die parabolische Kurve noch zwei weitere im Endlichen liegende Wendepunkte, bei der vierten und fünften dagegen sind diese Wendepunkte durch einen Doppel- resp. Rückkehrpunkt vertreten. Bei der ersten Hauptform kommt zu der Parabel noch ein Oval als Projektion der Zwillingskurve hinzu, und bei der zweiten ein isolierter Punkt. Damit ist nun auch die oben (3.) offen gelassene Frage beantwortet, wie viele divergierende Parabeln es gebe, als deren Projektionen sämtliche Linien III. Ordnung angesehen werden können. Wir erhalten in der That die fünf von *Newton* durch die Gleichung:*)

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

repräsentierten divergierenden Parabeln.

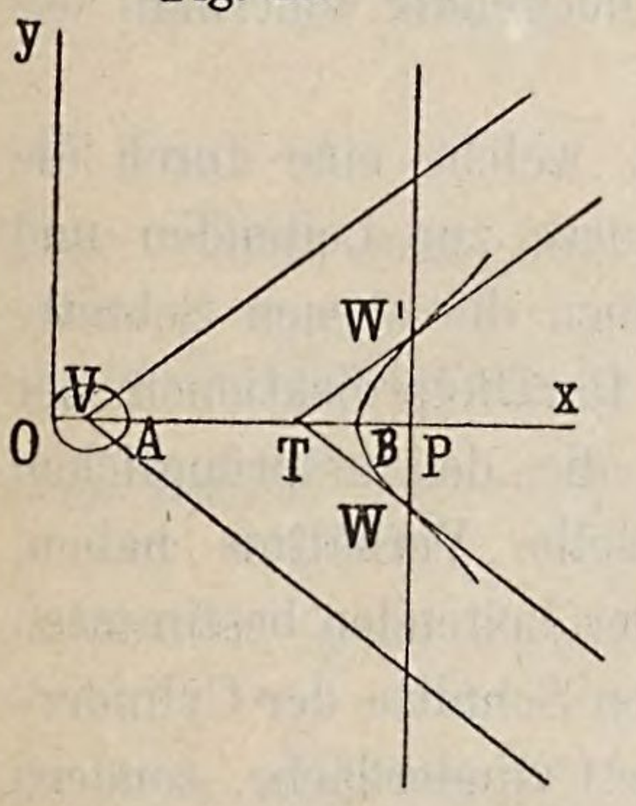
Wir werden daher, um die sphärischen Linien III. Ordnung genauer kennen zu lernen, vor Allem die fünf divergierenden Parabeln näher ins Auge zu fassen haben.

17. Eine unserer ersten Hauptform entsprechende Parabel (parabola cum ovali) wollen wir durch die für unsere Zwecke bequemere Gleichung:

$$cy^2 = x\,(x - \alpha)\,(x - \beta)$$

darstellen, wobei $\beta > \alpha$ vorausgesetzt ist. Diese Kurve schneidet die x-Axe, welche eine Symmetralaxe der Kurve ist, in O, A, B oder in $x = o$, $x = \alpha$, $x = \beta$, und hat im Allgemeinen die durch Fig. 10 gegebene Gestalt, wobei zu beachten ist, dass eine Tangente der parabolischen Kurve niemals das Oval schneiden oder berühren kann, weil diese Gerade sonst vier Punkte mit der Kurve gemein hätte.

Fig. 10.



Für unsere Zwecke ist nun hauptsächlich die Frage von Bedeutung: in welcher Beziehung zueinander stehen die verschiedenen divergierenden Parabeln, welche aus der obigen Gleichung hervorgehen, wenn man den Konstanten c, α, β nach und nach verschiedene Werte beilegt? Giebt man zunächst unter Beibehaltung derselben Werte

---

*) *Newton* unterscheidet nämlich hinsichtlich der Wurzeln der Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ die fünf möglichen Fälle: Die drei Wurzeln sind reell und verschieden, die zwei kleineren oder die zwei grösseren Wurzeln sind gleich, alle drei Wurzeln sind gleich und endlich zwei Wurzeln sind imaginär.

von α und β dem Koëffizienten c verschiedene Werte c', c'', c''' . . ., so erhalten wir eine Schar kollineärer Kurven in perspektivischer Lage, für welche die x-Axe die Kollineationsaxe und der unendlich ferne Punkt der y-Axe das Kollineationszentrum ist. Denn die in der Form:

$$y = \pm \sqrt{\frac{x\,(x-\alpha)\,(x-\beta)}{c}}$$

geschriebene Gleichung zeigt, dass diejenigen Werte von y, welche zu einer und derselben Abscisse x in den verschiedenen Kurven der Schar gehören, sich verhalten wie die reciproken Werte von $\sqrt{c'}$, $\sqrt{c''}$, $\sqrt{c'''}$ . . . Daher werden sich auch die Verbindungslinien der zu zwei beliebig gewählten Abscissen x und x' gehörigen Punkte jeder Kurve der Schar in demselben Punkt der x-Axe schneiden und somit auch die Tangenten in den zu derselben Abscisse gehörigen Punkten der einzelnen Kurven. Sind aber die Kurven der Schar auf die angegebene Art perspektivisch, so haben auch die Abscissen ihrer Wendepunkte alle denselben Wert, der somit nur von α und β, aber nicht von c, abhängig ist, und die Tangenten in den Wendepunkten sämtlicher Kurven schneiden die x-Axe in demselben Punkt T. Daraus ergiebt sich aber weiter, dass alle diese Kurven denselben Zentralpunkt V haben, weil nach der in (5.) angegebenen Konstruktion $VT = 2\,.\,TP$ ist. Für alle Kurven der Schar sind also die vier Punkte V, T, B, P dieselben. Nebenbei erkennt man noch, dass der Zentralpunkt V stets innerhalb des Ovals liegen muss, denn zieht man von den symmetrisch gegen das Oval gelegenen Wendepunkten w und w' aus je ein Paar von Tangenten an das Oval, so sind die Geraden, welche die resp. Berührungspunkte verbinden, die Polaren von w und w' (2. c). Der Schnittpunkt dieser Geraden liegt dann aber notwendig innerhalb des Ovals.

Denkt man sich ferner eine Cylinderfläche, welche eine durch die Gleichung $cy^2 = x\,(x-\alpha)\,(x-\beta)$ vorgestellte Kurve zur Leitenden und eine beliebige Gerade zur Richtlinie hat, dann geben die ebenen Schnitte dieser Cylinderfläche lauter Kurven, welche als Parallelprojektionen der Leitenden dieser affin sind, und für welche alle die den ursprünglichen Strecken α und β entsprechenden Strecken dasselbe Verhältnis haben. Ebenso sind die durch die Punkte V, T, B, P in der Leitenden bestimmten Verhältnisse $VT : TB : BP$ dieselbe für alle ebenen Schnitte der Cylinderfläche und zwar gilt dies nicht bloss für diese eine Cylinderfläche, sondern für alle möglichen Cylinderflächen, welche dieselbe Leitende haben.

Nimmt man nun jetzt eine zweite divergierende Parabel, bei welcher das Verhältnis $\alpha : \beta$ ein anderes ist als vorhin, als Leitende von Cylinderflächen, so geben die ebenen Schnitte dieser Cylinderflächen neue Scharen

unter sich affiner divergierender Parabeln, aber keine derselben ist einer der Parabeln aus den früheren Scharen affin, weil das Verhältnis $\alpha : \beta$ und damit auch die Verhältnisse $OT : TB : BP$ andere geworden sind.

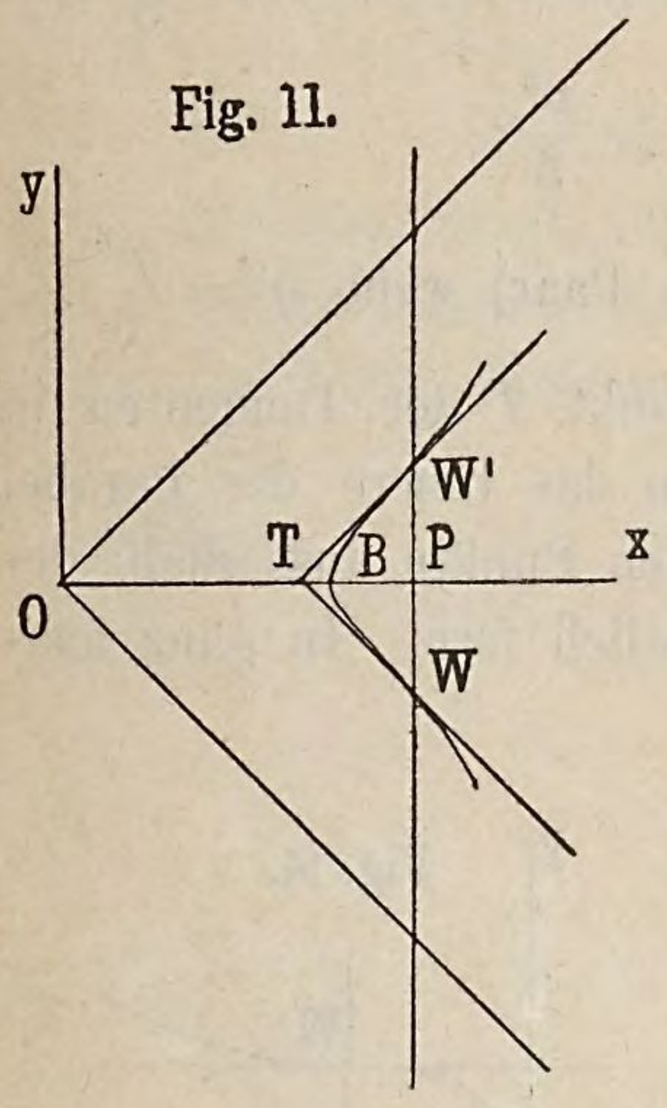
Wir schliessen daraus, dass es unendlich viele verschiedene divergierende Parabeln der ersten Art giebt, die aber im Allgemeinen einander nicht kollineär sind.

18. Eine der zweiten Hauptform der sphärischen Linien III. Ordnung entsprechenden divergierende Parabel (parabola punctata) hat die Gleichung:

$$cy^2 = x^2 (x - \beta).$$

Der Koordinatenursprung ist ein isolierter Punkt der Kurve, welche die x-Axe noch in dem Punkt B, dessen Abscisse β ist, schneidet (Fig. 11).

Fig. 11.



Die Wendepunkte w und w' haben die gemeinsame Abscisse $\frac{4}{3}\beta$ und die Ordinaten $\pm\frac{4}{3}\beta\sqrt{\frac{\beta}{3c}}$ und es besteht die Eigentümlichkeit, dass stets: $OT : TB : BP = 8 : 1 : 3$ und also $OT : TP = 2 : 1$. Hierauf folgt nach der in (5.) gegebenen Konstruktion, dass der Centralpunkt mit dem isolierten Punkt O zusammenfällt.

Aus dem konstanten Wert der Verhältnisse $OT : TB : BT$ schliessen wir aber, dass alle möglichen divergierenden Parabeln der zweiten Art einander kollineär sind. Giebt man nämlich dem Coëfficienten c nach und nach alle möglichen Werte, während man für β denselben Wert beibehält, so erhält man wie in (17.) eine Schar von kollineären Kurven in perspektivischer Lage. Giebt man aber β verschiedene Werte, z. B. β und $\beta' = m\beta$, so zeigen die Gleichungen $y = \pm x\sqrt{\frac{x-\beta}{c}}$ und $y' = \pm x'\sqrt{\frac{x'-\beta'}{c'}}$, dass, wenn man in der zweiten $c' = mc$ und $x' = mx$ nimmt, dann

$$y' = \pm mx\sqrt{\frac{mx - m\beta}{mc}} = \pm mx\sqrt{\frac{x-\beta}{c}} = my$$

ist, d. h. dass jedem Punkt xy der ersten Kurve, ein Punkt mx, my in der zweiten entspricht, oder dass die zwei Kurven ähnlich sind. Also zu jeder Kurve der Schar mit dem Coëfficienten β giebt es eine ihr ähnliche der Schar mit dem Coëfficienten β'. Es müssen somit alle überhaupt möglichen divergierenden Parabeln der zweiten Art einander kollineär sein.

19. Eine der dritten Hauptform der sphärischen Linien III. Ordnung entsprechende divergierende Parabel (parabola pura) ist gegeben durch die Gleichung:

$$cy^2 = x\,(x^2 - px + q^2) \text{ wobei } q^2 > \frac{p^2}{4}$$

Die durch diese Gleichung vorgestellten Kurven schneiden die x-Axe, welche wiederum eine Symmetralaxe der Kurve ist, nur in einem einzigen Punkt, dem Koordinatenursprung. Aber man hat bei diesen Kurven drei verschiedene Fälle zu unterscheiden. Sucht man nämlich die Bedingung, unter welcher die Kurve eine der x-Axe parallele Tangente hat, so findet man:

a) es giebt zwei Punkte (resp. Punktpaare wegen der Symmetrie gegen die x-Axe), in welchen die Tangente parallel der x-Axe wird, so oft q^2, das grösser als $\frac{p^2}{4}$ vorausgesetzt ist, zugleich kleiner als $\frac{p^2}{3}$ ist;

b) es giebt keine solche Tangente wenn $q^2 > \frac{p^2}{3}$;

c) es giebt eine solche Tangente (resp. ein Paar) wenn $q^2 = \frac{p^2}{3}$.

Im Falle a) Fig. 12 kommt der Schnittpunkt T der Tangenten in den Wendepunkten, sowie der Centralpunkt V in das Innere der Parabel zu liegen. Im Fall b) Fig. 13 liegen diese beiden Punkte ausserhalb der Parabel und im Fall c) Fig. 14 fallen sie unendlich fern. In ganz ana-

Fig. 12.

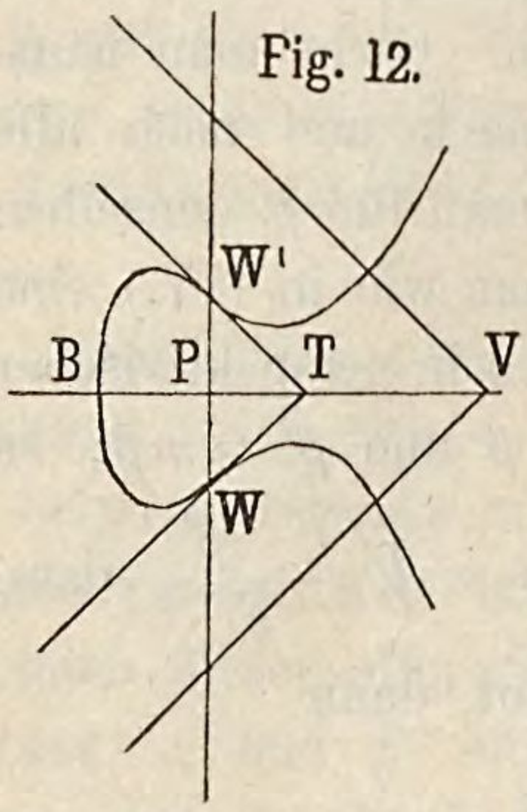


Fig. 13.

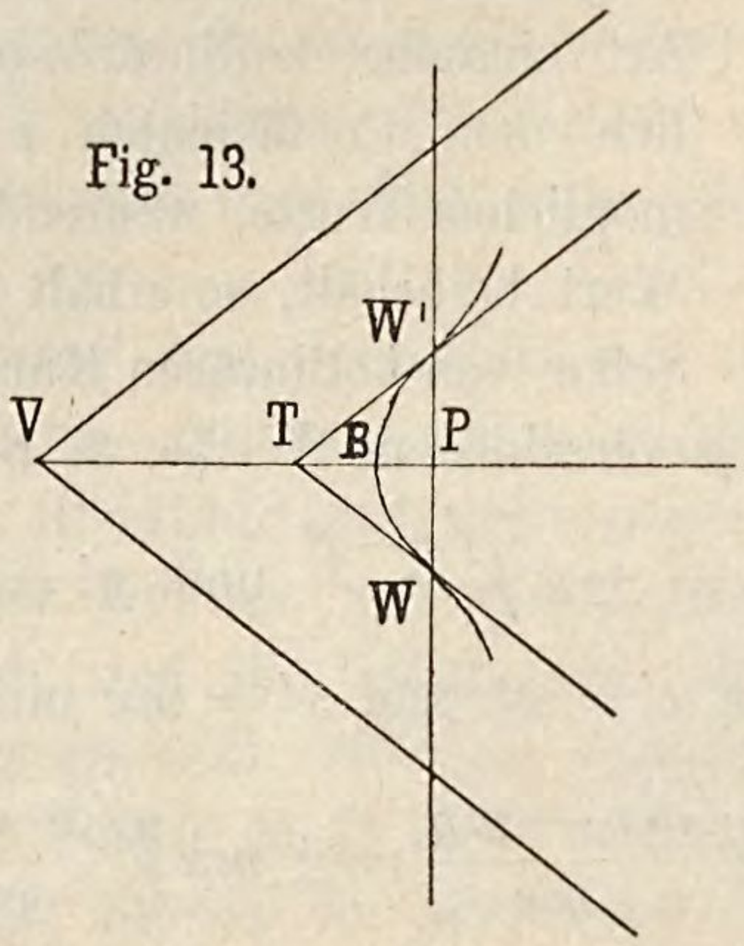
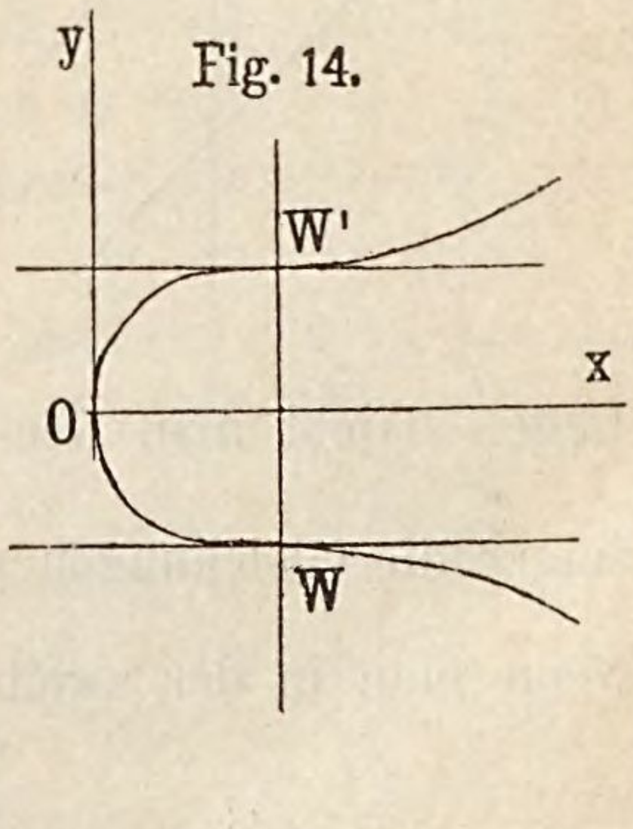


Fig. 14.



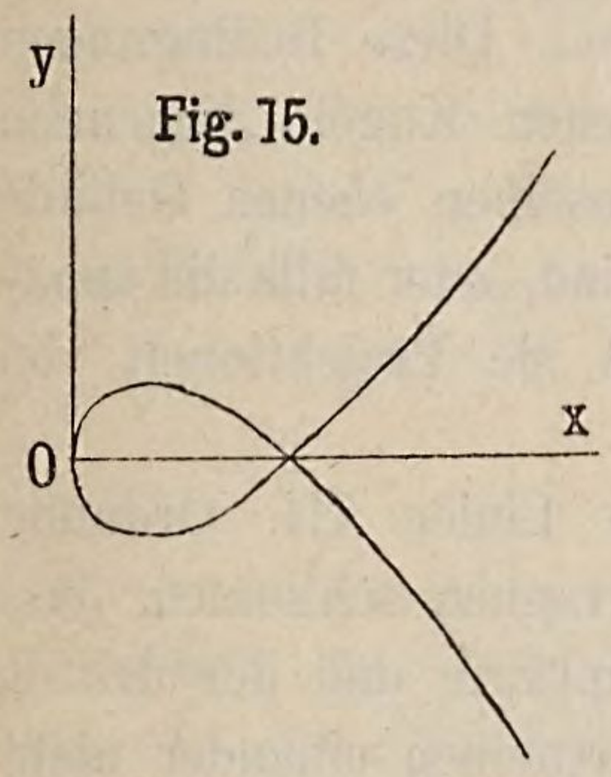
loger Weise wie in (17.) und (18.) werden wir schliessen, dass die divergierenden Parabeln der dritten Art in den Fällen a) und b) nur dann kollineär sind, wenn bei ihnen die Verhältnisse $VT : TP : PB$, resp. $VT : TB : BP$ dieselben sind, während sie im Fall c) stets kollineär sind.

20. Eine der vierten Hauptform sphärischer Linien III. Ordnung entsprechende divergierende Parabel (parabola nodata) ist gegeben durch die Gleichung:

$$cy^2 = x\,(x = \alpha)^2.$$

Die x-Axe ist wiederum Symmetralaxe und wird von der Kurve im Koordinatenursprung und in dem Punkt $x = \alpha$, welcher ein Doppelpunkt ist, geschnitten, Fig. 15. Indem man sich alle möglichen Cylinderflächen denkt, deren Leitende eine divergierende Parabel der vierten Art ist, geben die ebenen Schnitte derselben alle möglichen denkbaren Formen dieser Parabeln (abgesehen vom Grössenmassstab) und alle diese Schnitte sind als Parallelprojektionen der Leitenden dieser affin. Wir schliessen daraus, dass überhaupt alle divergierenden Parabeln der vierten Art einander kollineär sind.

Fig. 15.

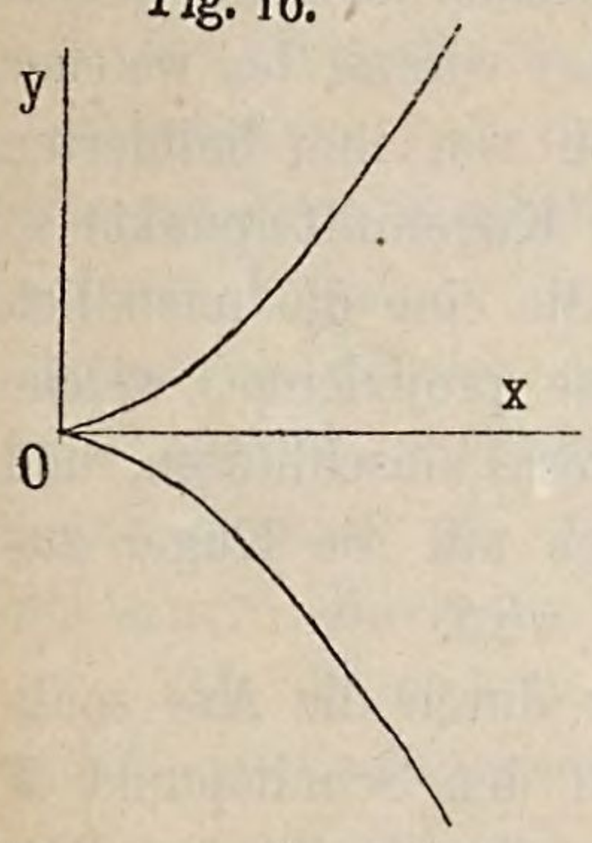


21. Endlich ist eine der fünften Hauptform der sphärischen Linien III. Ordnung entsprechende divergierende Parabel (parabola cuspidata) gegeben durch die Gleichung:

$$cy^2 = x^3.$$

Da in dieser Gleichung nur ein einziger Coëfficient vorkommt, so sieht man, dass sämtliche durch sie vorgestellten Kurven sich nur durch den Grössenmassstab unterscheiden. Die Kurve hat die x-Axe zur Symmetralaxe und im Ursprung einen Rückkehrpunkt, Fig. 16. Wie bei der vorigen Art, schliessen wir auch bei dieser, dass sämtliche divergierende Parabeln der fünften Art einander kollineär sind.

Fig. 16.



§ 5.

Die sphärischen Linien III. Ordnung speziell als Projektionen der divergierenden Parabeln betrachtet.

22. Werden die divergierenden Parabeln auf eine Kugelfläche projiziert, so dass der Kugelmittelpunkt das Projektionscentrum ist, so wird hinsichtlich der Kollineationsverhältnisse der einzelnen sphärischen Linien derselben Hauptform ganz dasselbe gelten wie hinsichtlich der einzelnen

divergierenden Parabeln derselben Art. Wir nennen überhaupt zwei sphärische Gebilde auf verschiedenen Kugelflächen oder auf derselben Kugelfläche kollineär, wenn je drei auf einem Hauptkreis liegende Punkte des einen Gebildes drei Punkten des andern entsprechen, welche wieder auf einem Hauptkreis liegen, und wenn das Doppelverhältnis von je vier auf einem Hauptkreis liegenden Punkten des einen gleich ist dem Doppelverhältnis der vier entsprechenden Punkten des andern. Diese Bedingungen sind aber erfüllt, wenn die beiden auf verschiedenen Kugeln liegenden sphärischen Gebilde Projektionen von ein und demselben ebenen Gebilde (oder auch von zwei kollineären ebenen Gebilden) sind, oder falls die sphärischen Gebilde auf derselben Kugel liegen, wenn sie Projektionen von zwei kollineären ebenen Gebilden sind.

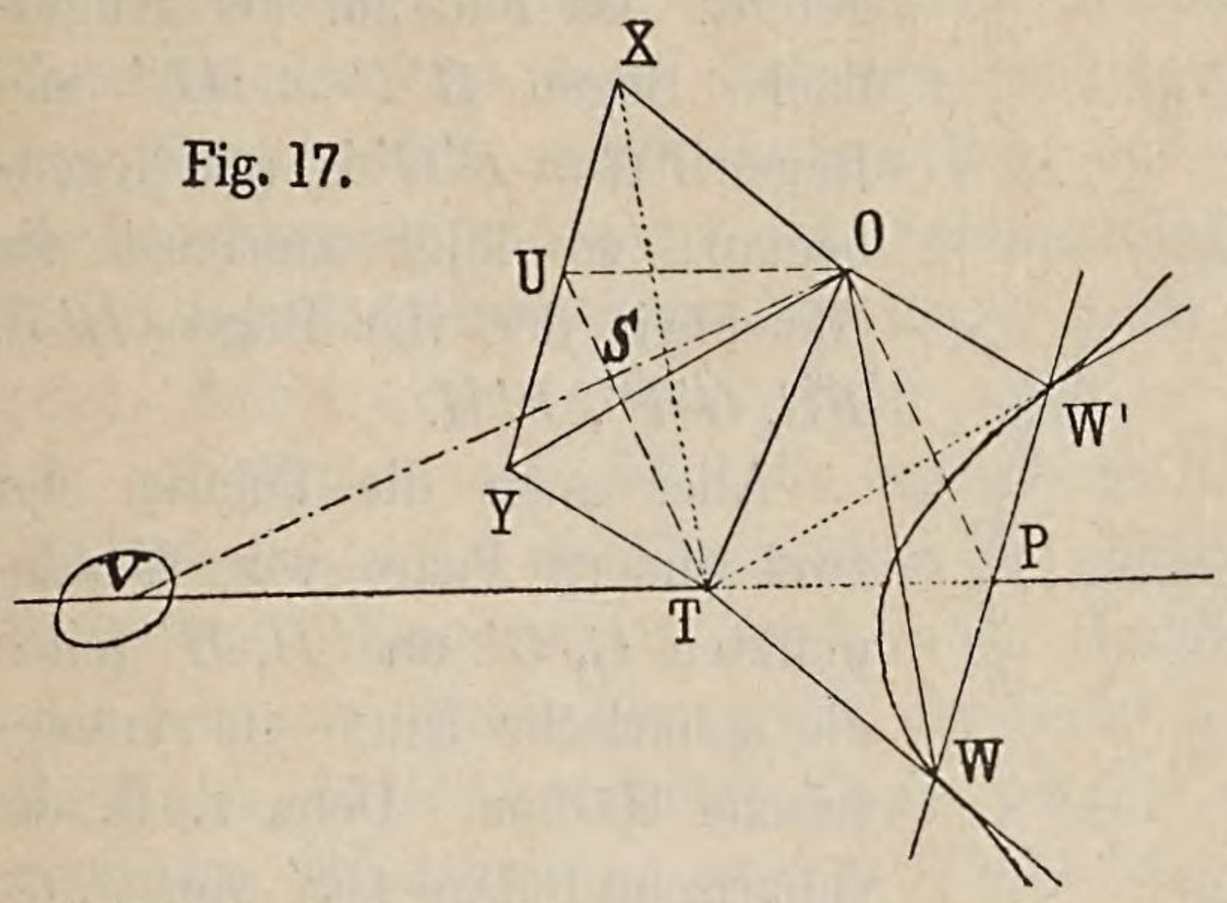
In Anwendung dieser Sätze auf sphärische Linien III. Ordnung werden wir mit Berücksichtigung des vorigen Paragraphen schliessen, dass es unendlich viele sphärische Linien der ersten Hauptform und der dritten Hauptform, Fall a) und b), giebt, welche im Allgemeinen einander nicht kollineär sind, dass dagegen sämtliche sphärische Linien der zweiten Hauptform, der dritten Hauptform, Fall c), sowie der vierten und fünften je in Kollineationsverwandtschaft stehen.

23. Die Projektion der divergierenden Parabeln auf Kugelflächen lehrt uns die sphärischen Linien III. Ordnung noch genauer kennen. Setzen wir zunächst eine divergierende Parabel der ersten Art voraus, bei welcher der Durchmesser (die Axe) senkrecht steht auf den von ihm halbierten Sehnen, so können wir das Projektionscentrum (den Kugelmittelpunkt) so wählen, dass die drei Wendetangenten (von denen die eine die unendlich ferne Gerade ist) sich auf die Kugel als Hauptkreise projizieren, welche ein gleichseitiges sphärisches Dreieck (und Gegendreieck) einschliessen, und dass der Centralpunkt der Parabel in der Projektion auf die Kugel zugleich der sphärische Mittelpunkt des Wendekreises wird.

Zu diesem Behufe ziehe man (Fig. 17) in der durch die Axe senkrecht zur Ebene der Parabel gelegten Ebene durch den Schnittpunkt T der Tangenten in den Wendepunkten W und W' eine Gerade TO so, dass TO mit TW und TW' je einen Winkel $= WTW'$ bilde und zugleich $TO = TW = TW'$ sei. Zieht man ferner durch O die Strecken OX und OY parallel resp. mit WT und $W'T$ und macht $OX = OY = OT$, so entstehen zwei gleichseitige kongruente Pyramiden, die eine mit der Spitze T und der Basis WOW', die andere mit der Spitze O und der Basis TXY; die Basen beider Pyramiden sind parallel und die zur Ebene der Parabel senkrechte Ebene POT halbiert WW' in P und XY in U senkrecht und enthält daher auch die von O ausgehende zur Basis TXY senkrechte Schwerlinie der Pyramide O, TXY, welche die Gerade TU so

in S schneidet, dass $ST = 2.\ SU$. Verlängert man OS, bis sie die Axe der Parabel in V trifft, so ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke VST und OSU auch $VT = 2.\ OU$. Aber OU ist parallel und gleich TP, daher $VT = 2.TP$. Der Punkt V fällt somit mit dem Centralpunkt der Parabel zusammen (5.). Die Gerade OV, welche senkrecht auf der Ebene TXY steht, steht daher auch senkrecht auf der mit TXY parallelen Ebene OWW'.

Fig. 17.



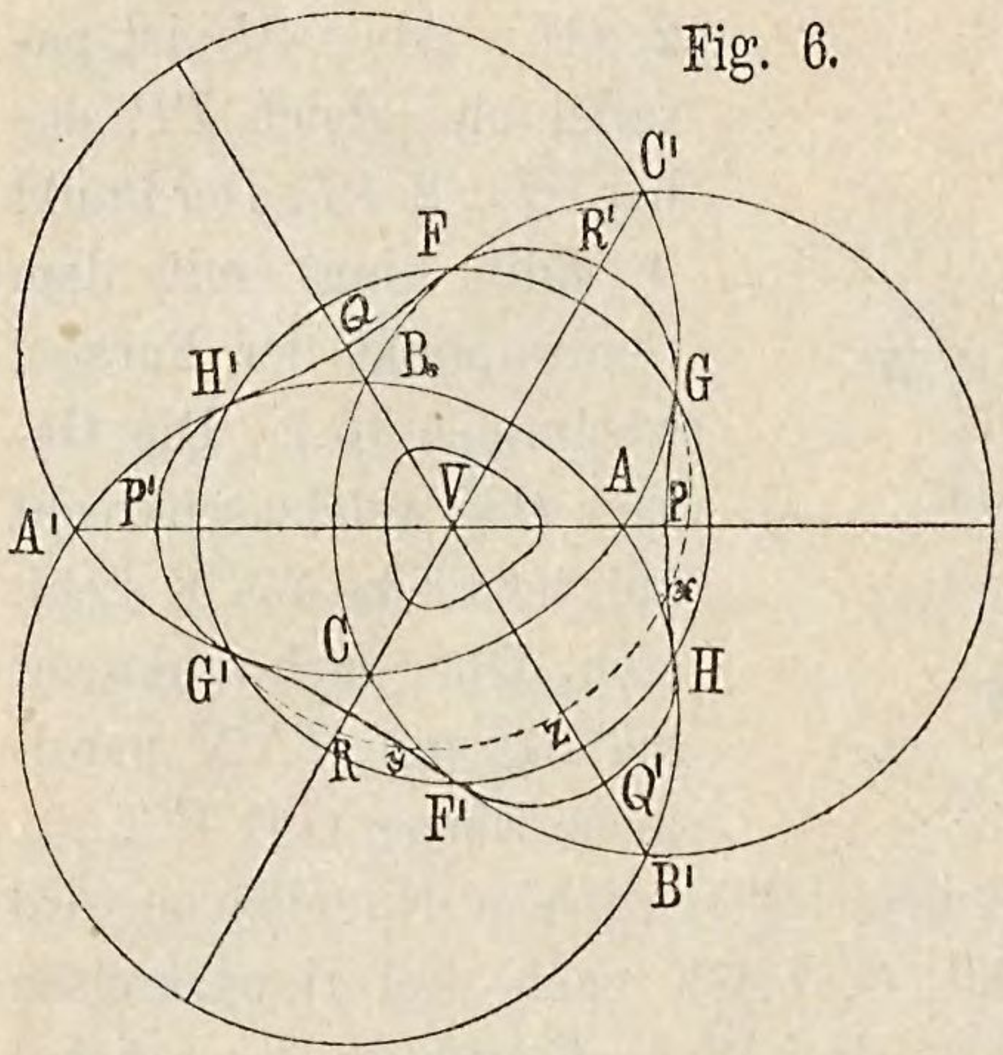
Eine um O mit beliebigem Halbmesser beschriebene Kugelfläche wird nun von den drei Seiten der Pyramide O, TXY nach drei Hauptkreisen geschnitten, welche die Projektionen der drei Wendetangenten der Parabel sind, und die drei Paare von Durchschnittspunkten dieser drei Hauptkreise bilden die Ecken eines Paars von gleichseitigen sphärischen Gegendreiecken ABC und $A'B'C'$. Die Ebene OWW' schneidet die Kugel nach dem „Wendekreis“ und die Gerade OV giebt die Projektionen des Centralpunkts auf die Kugelfläche, welche zugleich die sphärischen Mittelpunkte des Wendekreises und der beiden gleichseitigen Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sein werden. Zugleich sieht man, dass die Projektion des Bogens WW' auf der Kugel in das sphärische Dreieck fällt, dessen Seiten durch die Ebene des Wendekreises OWW', die Ebene OTX, welche die Tangente TW enthält, und die Ebene OTY, welche die Tangente TW' enthält, bestimmt sind. Es muss sich daher in der stereographischen Projektion (14.) die Kurve durch die sechs am Wendekreis liegenden Dreiecke hinziehen.

24. Wenn nun aber (Fig. 6 s. folgende Seite) das sphärische Dreieck ABC gleichseitig und sein Mittelpunkt V zugleich der sphärische Mittelpunkt des Wendekreises ist, so folgt, dass die drei Paare von Wendepunkten FF', GG', HH' den Wendekreis in sechs gleiche Teile teilen und daraus folgt weiter die Gleichheit und sogar Kongruenz der sechs oberhalb und unterhalb des Wendekreises auf der Kugel liegenden Kurvenbögen.

Denn ist F, F' die Projektion des unendlich fernen Wendepunkts der Parabel auf die Kugelfläche, so projiziert sich bei der angenommenen Lage des Kugelmittelpunkts die Polare dieses Wendepunkts, d. h. die Axe der Parabel, in einen Hauptkreis, welcher sich in der stereographischen Projektion als Gerade PP' senkrecht zum Durchmesser FF' darstellt, und diese Gerade PP' ist daher eine Symmetralaxe der Figur. Es ist also auf der

Kugel Bogen $H'F = G'F'$ und Bogen $FG = F'H$ und überdies sind die Bögen GH und $G'H'$ resp. durch P und P' in zwei symmetrische Hälften geteilt. Da nun auf der Kugelfläche Bogen $H'F = HF'$ und Bogen $FG = F'G'$ ist (als Gegenbogen), so folgt zunächst die Gleichheit der vier Bögen $H'F$, FG, $G'F'$, $F'H$.

Fig. 6.



Aber auch die Polaren der zwei andern Paare von Wendepunkten G, G' und H, H' teilen die sphärische Kurve in symmetrische Hälften. Denn z. B. die sphärische Polare QQ' von G, G' muss durch den Schnittpunkt B der Tangenten in den zwei andern Wendepunkten (2.) und durch den Centralpunkt V, welcher der sphärische Mittelpunkt des Dreiecks ABC ist, gehen, somit in der stereographischen Projektion auf die Ebene des Wendekreises sich wieder als eine Gerade QQ' projizieren, welche senkrecht auf GG' steht. Schneidet ferner irgend ein durch G, G' gehender Hauptkreis, als Projektion einer durch den Wendepunkt W der Parabel gehenden Sekante, die sphärische Kurve in zwei Punkten X und Y und die sphärische Polare von G, G' in Z, so sind $GXZY$ vier harmonische Punkte dieses Hauptkreises und da die Halbmesser OG und OZ senkrecht aufeinander stehen (weil OZ in einer zu OY senkrechten Ebene liegt), so müssen die Halbmesser OX und OY gleiche Winkel mit OZ bilden oder Bogen $ZX = ZY$ sein, d. h. die sphärische Polare QQ' von G, G' teilt die sphärische Kurve in zwei symmetrische Hälften. In Folge dessen ist dann Bogen $H'G' = FG$ und Bogen $G'F' = GH$ und weil auf der Kugelfläche Bogen $H'G' = GH$ (als Gegenbögen) und ebenso Bogen $FG = F'G'$, so folgt, dass die vier Bögen $H'G'$, FG, $F'G'$, GH einander gleich sind; dann aber sind wegen der schon oben genannten vier gleichen Bögen, die sechs die Kurve bildenden Bögen einander gleich, und da jeder derselben wieder durch die entsprechende sphärische Polare eines Wendepunkts in zwei symmetrische Hälften geteilt wird, so sind die sechs Bögen einander kongruent.

Ganz auf dieselbe Weise überzeugt man sich, dass auch die Zwillingskurve durch die sphärischen Polaren der Wendepunkte je in zwei symmetrische Hälften geteilt wird.

25. Wir gewahren somit an der sphärischen Kurve eine dreifache Symmetrie, während die divergierende Parabel, durch deren Projektion sie entstanden ist, nur eine einfache Symmetrie hat. Der Grund dieses Unterschiedes liegt darin, dass bei der divergierenden Parabel der eine der drei Wendepunkte unendlich fern liegt und deshalb die Polare desselben ein Durchmesser und somit eine Symmetralaxe wird (3.), während bei der Projektion der Parabel auf die Kugel jeder der drei Wendepunkte samt seiner Polare genau dieselbe Rolle spielt.

Projiziert man jetzt die sphärische Kurve zurück auf eine Ebene, welche parallel ist der Ebene eines die sphärische Kurve in einem der drei Paare von Wendepunkten berührenden Hauptkreises, so ist es wegen der oben nachgewiesenen Kongruenz der sechs Kurvenbögen einerlei, ob man die Kurve $FGHF'$ auf eine Ebene parallel der Ebene des in F, F' berührenden Hauptkreises, oder $G'H'FG$ oder $HF'G'H'$ auf Ebenen projiziert, welche resp. parallel sind den die Kurve in G, G' oder H, H' berührenden Hauptkreisen. Die Projektionen werden stets ähnliche divergierende Parabeln sein, bei welchen namentlich die in (17.) erwähnten Verhältnisse $VT : TB : BP$ dieselben sind. — Die Gleichheit der Verhältnisse dieser Strecken bei den divergierenden Parabeln, welche als Rückprojektionen einer sphärischen Kurve auf Ebenen parallel den Berührungskreisen in den drei Paaren von Wendepunkten erhalten werden, findet aber auch dann noch statt, wenn der Kugelmittelpunkt nicht mehr die bisher angenommene besondere Lage hat, sondern ein beliebiger Punkt im Raum ist und in Folge dessen die drei Paare von Wendepunkten den Wendekreis nicht mehr in sechs gleiche Teile teilen und die drei Paare von Gegenbögen der sphärischen Kurve nicht mehr kongruent sind. Es sei nämlich $fgh\ f'g'h'$ die Projektion derselben divergierenden Parabel wie vorhin auf eine zweite Kugelfläche mit dem beliebigen Mittelpunkt o. Dann ist jedenfalls $fghf'$ kollineär der früheren Kurve $FGHF'$ (22.); desgleichen ist $g'h'fg$ kollineär $G'H'FG$ und $hf'g'h'$ kollineär $HF'G'H'$. Aber nach dem Obigen sind $FGHF$, $G'H'FG$ und $HF'G'H'$ kongruent und daher auch in der Art kollineär wie die Aufeinanderfolge der Buchstaben zeigt, somit müssen auch in derselben Weise $fghf'$, $g'h'fg$ und $hf'g'h'$ einander kollineär sein, und da bei der Projektion dieser Kurven auf Ebenen, welche resp. parallel sind den Berührungskreisen in f, f'; g, g'; h, h', die diesen Wendepunkten entsprechenden Punkte ins Unendliche fallen. so sind diese Projektionen affine divergierende Parabeln und daher auch die Verhältnisse der resp. Strecken $VT : TB : BP$ dieselben.

26. Die Resultate unserer Untersuchung in den Art. 23—25 über die Projektion von divergierenden Parabeln der ersten Art auf eine Kugelfläche und die Rückprojektion der sphärischen Kurve auf Ebenen, welche

parallel sind den Berührungskreisen in den Wendepunkten, lassen sich unmittelbar übertragen auf die Fälle, wo es sich um divergierende Parabeln der zweiten oder dritten Art handelt. Bei den divergierenden Parabeln der zweiten Art kommt nur die Besonderheit in Betracht, dass die Verhältnisse $VT : TB : BP$ den konstanten Wert 8 : 1 : 3 haben (18). Bei den divergierenden Parabeln der dritten Art hat man wieder wie in (19.) drei Fälle zu unterscheiden. Im Falle a) zieht sich die sphärische Kurve durch die sechs beiderseits am Wendekreis liegenden Vierecke, und im Fall b) durch die sechs Dreiecke hin, wie man sich überzeugt, wenn man für diese zwei Fälle die der Fig. 17 analoge Figur konstruiert und die in (23.) angestellten Betrachtungen wiederholt. Der Fall c) dagegen, in welchem die Tangenten in den Wendepunkten W und W' parallel sind und der Centralpunkt V unendlich fern liegt, bietet folgende Abweichungen. Die zwei Ebenen, welche man durch ein beliebig im Raum gewähltes Projektionscentrum und die beiden Tangenten in den Wendepunkten W und W' zu legen hat, schneiden sich (Fig. 18) in einer Geraden OV, welche diesen Tangenten parallel ist, und durch diese Gerade, welche zugleich den Centralpunkt enthält, geht auch die Ebene, welche die unendlich ferne Wendetangente der Parabel projiziert. Es werden sich daher auf der Kugelfläche die drei Hauptkreise, welche Projektionen der Wendetangenten sind, in Einem Punktpaar schneiden, welches zugleich den Centralpunkt der sphärischen Kurve vorstellt. Diese Kurve selbst besteht wieder aus sechs Bögen, welche abwechslungsweise oberhalb und unterhalb des Wendekreises liegen. In der stereographischen Projektion auf die Ebene des Wendekreises (Fig. 19) ist der Unterschied zwischen den krummlinigen Vierecken und Dreiecken zu beiden Seiten des Wendekreises fortgefallen. Will man die ausgezeichnete Lage des Kugelmittelpunkts, für welche die drei Paare von Wendepunkten den Wendekreis in sechs gleiche Teile teilen und die sechs Kurvenbögen kongruent werden, so hat man (Fig. 18) in der durch WW' senkrecht zur Ebene der Parabel gelegten Ebene den Punkt O so zu wäh-

Fig. 18.

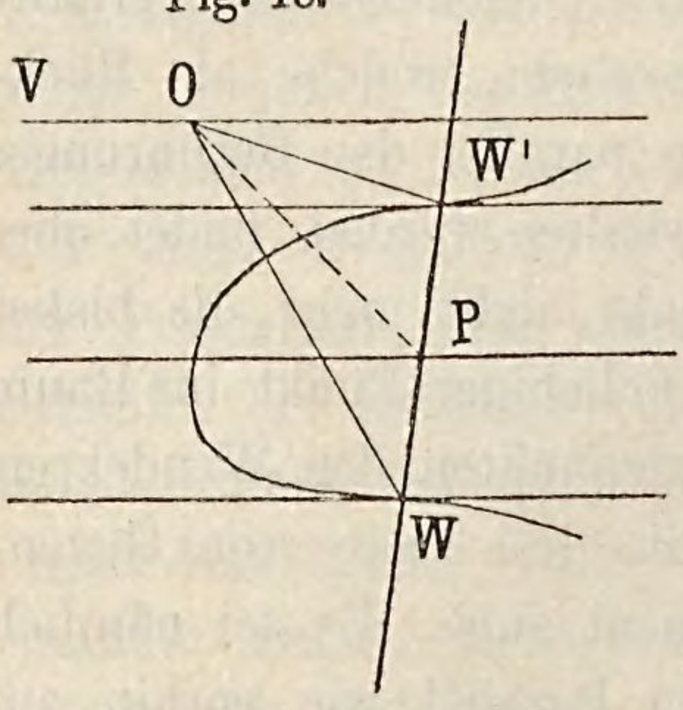
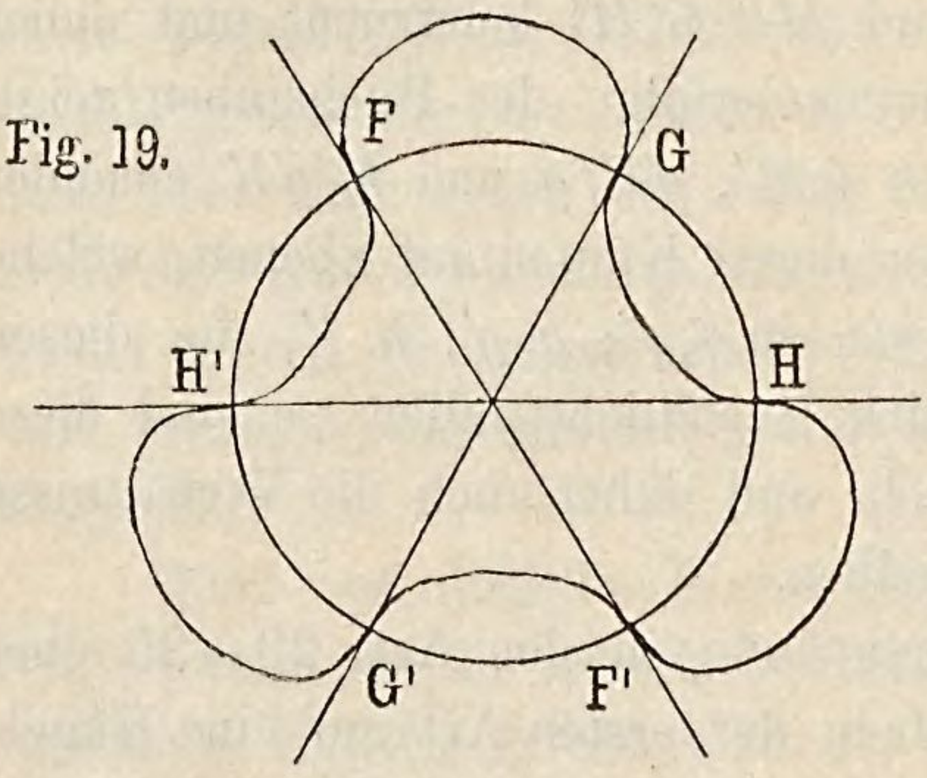


Fig. 19.



len, dass Winkel $WOW' = 60°$ und zugleich $OW = OW'$ ist. Man überzeugt sich leicht, dass wie auch das Projektionscentrum gewählt werde, die Projektion der sphärischen Kurve auf eine Ebene, welche parallel ist dem die Kurve in einem Wendepunktpaar berührenden Hauptkreis, stets eine divergierende Parabel giebt, bei welcher die Tangenten in den zwei im Endlichen liegenden Wendepunkten parallel sind. Alle auf diese Weise erhaltenen divergierenden Parabeln sind kollineär (22).

26. Was die Projektion der divergierenden Parabeln der vierten und fünften Art auf eine Kugelfläche betrifft, so genügt es hier, auf das in den Art. 15. 20. 21. Gesagte hinzuweisen. Die dreifache Symmetrie, welche bei den sphärischen Linien der drei ersten Hauptformen stattfindet, existiert bei denen der vierten und fünften Hauptform nicht mehr, weil die divergierenden Parabeln der vierten und fünften Art nur noch Einen (unendlich fernen) Wendepunkt haben. Aber alle sphärischen Linien der vierten und der fünften Art sind je unter sich kollineär (22.).

§ 6.

Über die Einteilung der Linien III. Ordnung in Gattungen und Arten.

27. Wir haben im Bisherigen gesehen, dass jede Linie III. Ordnung in eine divergierende Parabel projiziert werden kann, und dass es fünf, beziehungsweise sieben verschiedene Arten solcher Parabeln giebt und dementsprechend ebensoviele Hauptformen sphärischer Linien III. Ordnung. Nimmt man nun bei jeder der Hauptformen der sphärischen Linien Hauptkreise auf der Kugelfläche an, welche die Kurve auf charakteristische Weise schneiden, so werden die Projektionen der sphärischen Kurve auf Ebenen, welche diesen schneidenden Hauptkreisen parallel sind, ebensoviele charakteristische Formen ebener Linien III. Ordnung ergeben. Hiemit ist der Weg vorgezeichnet für eine Einteilung der ebenen Linien III. Ordnung in Gattungen und Arten.

Man könnte allerdings einwenden, da es bei den sphärischen Linien III. Ordnung der Hauptformen I. und IIIa. und IIIb. unendlich viele verschiedene unter sich nicht kollineäre Kurven giebt, so müsse es auch unendlich viele Gattungen ebener Linien III. Ordnung geben und damit könne überhaupt von einer Einteilung nicht die Rede sein. Aber alle sphärischen Linien III. Ordnung, welche derselben Hauptform angehören, haben doch im Wesentlichen dieselbe Gestalt, sie unterscheiden sich voneinander nur quantitativ hinsichtlich gewisser bei ihnen auftretenden Grössenverhältnisse, keineswegs aber qualitativ hinsichtlich der ihnen zukommen-

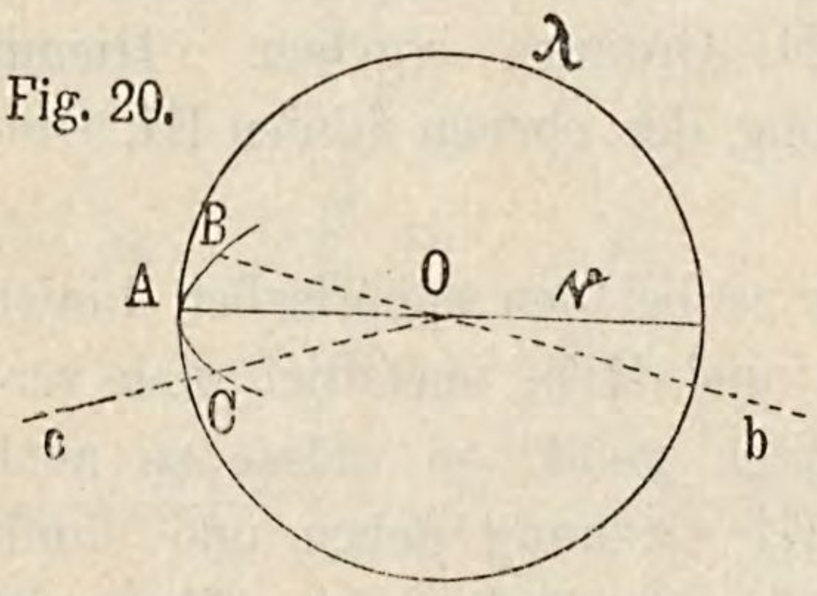
den Eigentümlichkeiten; alle haben dieselbe Anzahl von Wendepunkten und dieselbe Lage gegen die in den Wendepunkten berührenden Hauptkreise. Man wird daher auch bei allen dieselbe Anzahl charakteristischer Lagen von schneidenden Hauptkreisen unterscheiden können und deshalb bei der Projektion der sphärischen Kurve auf Ebenen, welche diesen Hauptkreisen parallel sind, dieselbe Anzahl charakteristiseher Formen ebener Linien III. Ordnung erhalten. Hiemit dürfte eine Einteilung der ebenen Linien III. Ordnung in fünf (beziehungsweise sieben) Gattungen und die jeder Gattung in eine bestimmte Anzahl von Arten gerechtfertigt erscheinen.

28. Bevor wir aber die Einteilung der Gattungen in Arten vornehmen, wollen wir noch einige allgemeine Sätze über die Projektion von sphärischen Kurven auf Ebenen vorausschicken, von denen wir in der Folge Gebrauch machen werden.

a) Wenn ein Hauptkreis ν eine sphärische Kurve in irgend einem Punkt A schneidet, so ist die Projektion von A auf eine mit ν parallele Ebene ein unendlich ferner Punkt a dieser Ebene, in welchem zwei ins Unendliche laufende Zweige der Kurve zusammenhängen, welche sich einer gemeinsamen Asymptote (der Projektion des die sphärische Kurve in A berührenden Hauptkreises) nach entgegengesetzten Richtungen ohne Aufhören nähern und zwar auf verschiedenen Seiten der Asymptote (wie bei einer gewöhnlichen Hyperbel) oder auf derselben Seite (wie bei einer Conchoïde), je nachdem der Punkt A ein gewöhnlicher Punkt oder ein Wendepunkt ist.

Wenn nämlich (Fig. 20) der Kreis λ als Umriss einer Kugel zugleich den Hauptkreis vorstellt, welcher die sphärische Kurve in A berührt und der Einfachheit halber der Kreis ν senkrecht zu λ angenommen wird, so dass er sich als ein Durchmesser von λ mit A als Endpunkt projiziert, so werden, wenn A ein gewöhnlicher Punkt ist, die beiden in A zusammenhängenden Kurventeile AB und AC auf derselben Seite von λ (etwa der vorderen) liegen, aber auf verschiedenen Seiten von ν; projiziert man nun vom Mittelpunkt O aus die Kurve und den Kreis λ auf eine zu ν parallele Ebene, so wird sich λ als eine Gerade projizieren, welche die Kurve in dem unendlich fernen Punkt a berührt d. h. als Asymptote, die Projektion b von B wird nach rechts, die Projektion c von C nach links fallen, und zwar fällt b hinter und c vor die

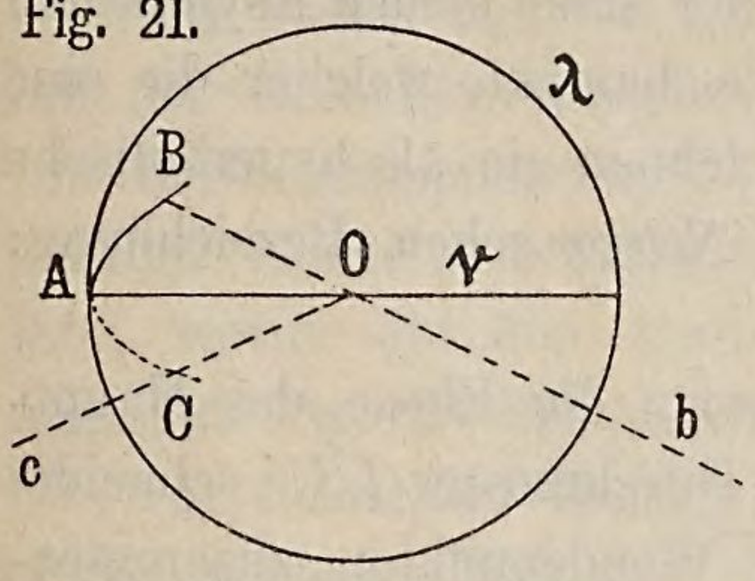
Fig. 20.



Asymptote und um so näher an diese Asymptote, je näher B und C an A gedacht werden.

Ist aber A ein Wendepunkt, so liegt (Fig. 21) z. B. AB auf der vorderen, AC auf der hinteren Hälfte der Kugel, es wird dann wieder b nach rechts, c nach links hin fallen, aber beide hinter die Asymptote.

Fig. 21.



b) Wenn ein Hauptkreis ν eine sphärische Kurve in einem Punkt A berührt, so projizieren sich die beiden in A zusammenhängenden Kurventeile AB und AC auf eine mit ν parallele Ebene als parabolische Zweige, welche einander die konkave Seite zukehren (wie bei einer gewöhnlichen Parabel), oder ihre konvexe Seite (wie bei der *Neil*schen Parabel), je nachdem A ein gewöhnlicher Punkt oder ein Wendepunkt ist.

Denn stellt wieder der Kreis λ den Umriss einer Kugel vor, auf dessen Ebene sich der Kreis ν als Durchmesser mit dem Endpunkt A projiziert, so wird, falls A ein gewöhnlicher Punkt ist (Fig. 22), Bogen AB auf der vorderen Seite von λ liegen und AC auf der hinteren und die Projektionen b und c von B und C auf eine mit ν parallele Ebene werden beide nach rechts hin fallen und dabei der Winkel bOc um so kleiner werden, je näher B und C an A angenommen werden; es werden also b und c Zweige einer parabolischen Kurve beschreiben, welche ihre konkaven Seiten einander zukehren. Ist aber A ein Wendepunkt (Fig. 23), so wird sich BAC auf die Ebene von λ als Kurve mit dem Rückkehrpunkt A projizieren, so dass z. B. AB vor und AC hinter λ liegt, und die Projektionen von B und C auf eine mit ν parallele Ebene werden die eine b nach rechts, die andere c nach links fallen, aber beide nach vorn hin und dabei der Winkel boc umsomehr einem flachen Winkel sich nähern, je näher B und C an A angenommen werden; es werden also b und c divergierende parabolische Zweige beschreiben.

Fig. 22.

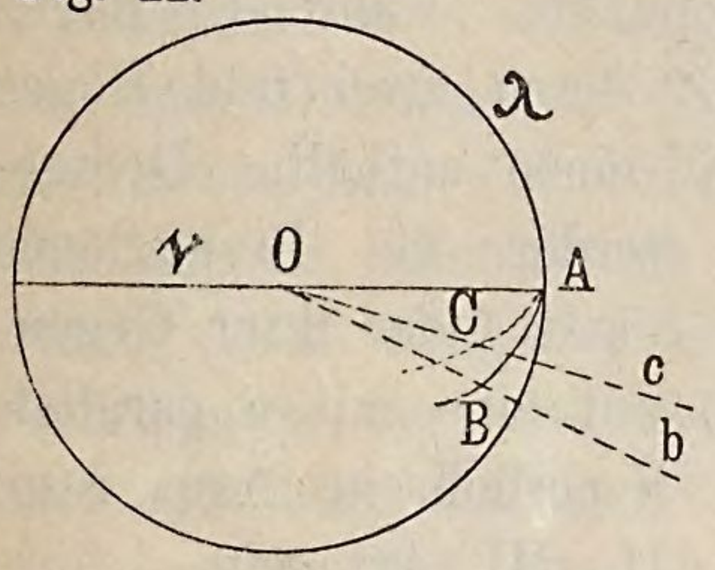
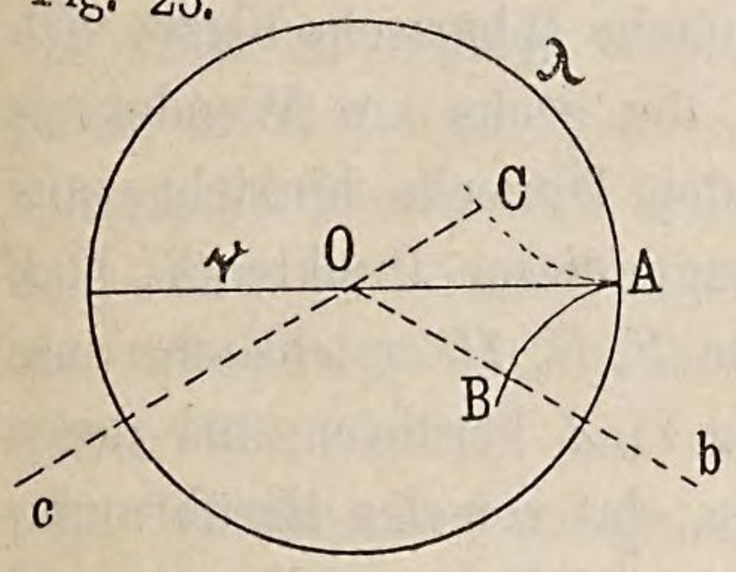


Fig. 23.

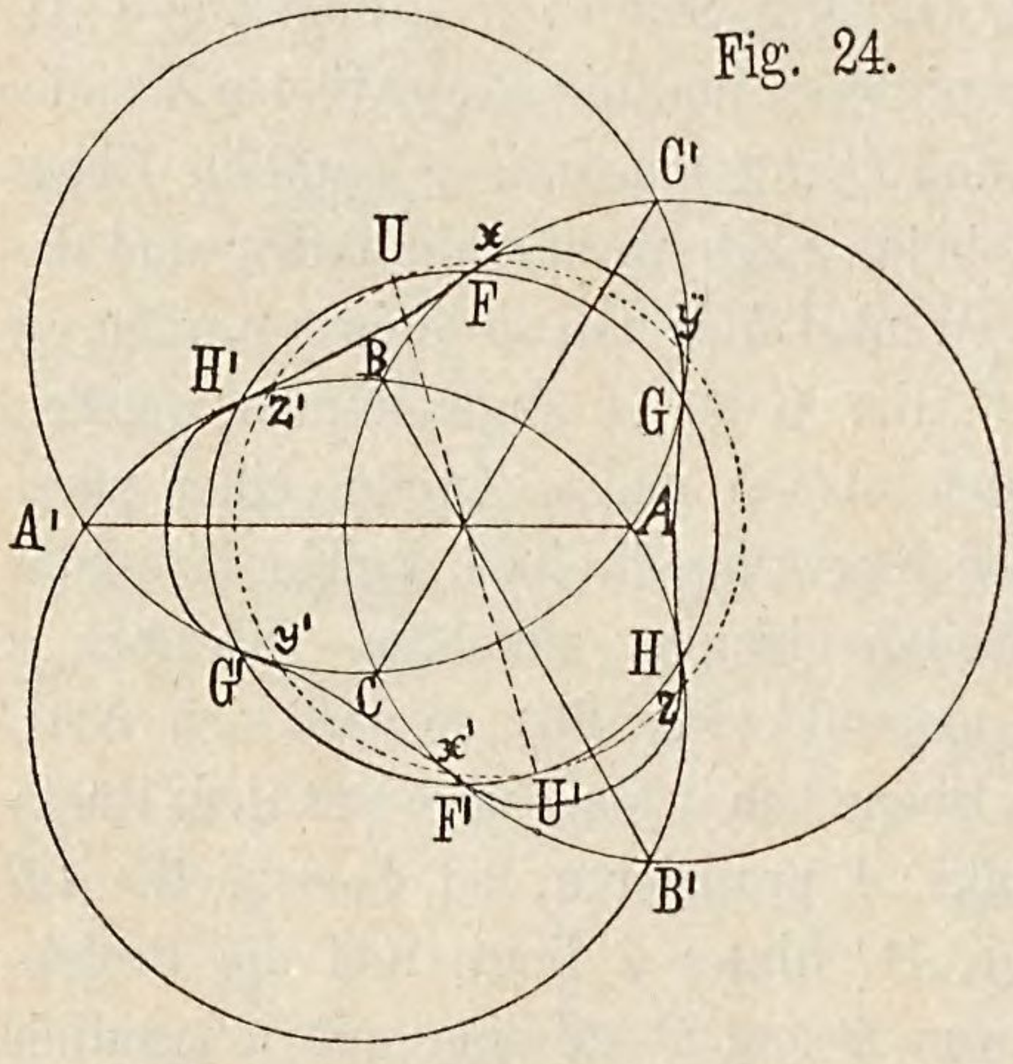


29. Hiezu kommen speziell bei Projektion von sphärischen Linien III. Ordnung noch folgende Sätze:

a) Wird eine einfache sphärische Linie III. Ordnung mit drei Paaren von Wendepunkten von einem Hauptkreis ν in drei beliebige Punktpaaren geschnitten, so erhält man als Projektion der sphärischen Kurve auf eine mit ν parallele Ebene drei hyperbolische Äste verschiedener Art, nämlich einen Ast ohne Wendepunkte, welcher ganz innerhalb seiner Asymptoten liegt; einen Ast mit zwei Wendepunkten, welcher seine beiden Asymptoten zugleich schneidet und einen Ast mit einem Wendepunkt, welcher die eine seiner beiden Asymptoten schneidet. Wir bezeichnen sie als hyperbolische Äste der I., II., III. Art, entsprechend der *Newton*schen Bezeichnung: hyperbola inscripta, circumscripta, ambigena.

Denn man überzeugt sich leicht, dass wenn die Ebene des Hauptkreises ν die Ebene des Wendekreises nach dem Durchmesser UU' schneidet (wobei U und U' nicht mit einem Paar von Wendepunkten zusammenfallen), dann der Hauptkreis ν von den drei oberhalb des Wendekreises liegenden Kurvenbögen (sowie von den drei unterhalb des Wendekreises liegenden Gegenbögen) nur zwei, und zwar den einen dieser Bögen in zwei Punkten, den andern nur in einem Punkt, schneiden kann. So wird (Fig. 24) z. B. der Bogen FG in X und Y, Bogen HF' in Z und Bogen $G'H'$ gar nicht geschnitten; der Bogen XY enthält keinen Wendepunkt, während Bogen $YGHZ$ deren zwei und Bogen $ZF'X'$ einen enthält. Demgemäss werden die Projektionen dieser Bögen (oder ihrer Gegenbögen) auf eine mit ν parallele Ebene hyperbolische Äste resp. der I., II., III. Art sein.

Fig. 24.



Zugleich ist in dem Fall, wo die einfache sphärische Kurve sich durch die sechs am Wendekreis liegenden Dreiecke hinzieht, aus der Lage dieser Punkte X, Y, Z gegen die ihnen resp. benachbarten Wendepunkte F, G, H ersichtlich, dass die Hauptkreise, welche die Kurve resp. in X, Y, Z berühren und deren Projektionen die Asymptoten der Hyperbel geben, das von den Berührungskreisen in den Wendepunkten gebildete Dreieck ABC umschliessen und damit auch eine bei der sphärischen Linie III. Ordnung etwa noch vorhandene Zwillingskurve. Es wird daher in der Projektion auf eine mit ν parallele Ebene ein etwa noch vorhandenes Oval (beziehungsweise ein isolierter Punkt) innerhalb des Asymptotendreiecks liegen müssen. Zugleich

beachte man, dass von keinem Punkt innerhalb des Dreiecks ABC ein die einfache Kurve berührender Hauptkreis gezogen werden kann und also in der Projektion auf eine Ebene auch keine Tangente an die Kurve von einem Punkt aus, welcher innerhalb des von den drei Wendetangenten gebildeten Dreiecks liegt.

b) Fallen von den drei Paaren von Schnittpunkten des Hauptkreises ν mit der einfachen sphärischen Kurve zwei Paare zusammen in ein Paar von Berührungspunkten, so erhält man in der Projektion auf eine mit ν parallele Ebene zwei hyperbolisch-parabolische Kurvenäste mit einer Asymptote, wovon der eine zwei Wendepunkte enthält, der andere einen, wie man aus Fig. 24 sieht, wenn man etwa X mit Y zusammenfallen lässt.

c) Schneidet endlich der Hauptkreis ν die einfache Kurve nur in einem einzigen Punktpaar XX', so erhält man als Projektion derselben auf eine mit ν parallele Ebene einen hyperbolischen Ast mit drei Wendepunkten und mit einer Asymptote, welche aber zugleich von der Kurve geschnitten wird, sofern der Hauptkreis, welcher die sphärische Kurve in XX' berührt, die einfache Kurve notwendig noch in einem Punkt schneiden muss (11); wir nennen eine solche Hyperbel schlangenförmig (bei *Newton* hyperb. anguinea).

d) Geht aber der schneidende Hauptkreis ν durch ein Paar von Wendepunkten, d. h. lässt man in Fig. 24 den Durchmesser UU' etwa mit dem Durchmesser FF' zusammenfallen, so hat die Projektion der sphärischen Linie III. Ordnung auf eine mit ν parallele Ebene stets einen Durchmesser, nämlich die Projektion der sphärischen Polare des Wendepunkts (24). Schneidet dabei ν die sphärische Kurve in zwei weiteren Punktpaaren, so wird man als Projektion der Kurve drei hyperbolische Äste erhalten, und zwar entweder einen hyperbolischen Ast der I. und zwei der III. Art, oder einen der II. und zwei der I. Art. Berührt aber ν die sphärische Kurve, so erhält man zwei hyperbolisch-parabolische Äste mit einer Asymptote und mit je Einem Wendepunkt (der dritte Wendepunkt ist der unendlich ferne Punkt der Asymptote). Endlich wenn ν die sphärische Kurve nur in dem Paar von Wendepunkten schneidet, so erhält man als Projektion der Kurve einen hyperbolischen Ast, der ganz auf der einen Seite seiner Asymptote liegt und ausser dem unendlich fernen Wendepunkt auf der Asymptote noch zwei weitere symmetrisch zum Durchmesser gelegene Wendepunkte hat. Wir nennen eine derartige Kurve eine conchoïdale Hyperbel.

§ 7.

Die erste Hauptform der sphärischen Linien III. Ordnung und die aus ihr sich ergebenden neunzehn Arten ebener Linien.

30. Die erste Hauptform der sphärischen Linien III. Ordnung besteht aus einer einfachen Kurve mit drei Paaren von Wendepunkten und einer Zwillingskurve (13). Ein die sphärische Kurve schneidender Hauptkreis ν kann nun (wofern er nicht durch ein Paar von Wendepunkten geht) folgende fünf charakteristische Lagen haben:

a) Der Hauptkreis ν schneidet die einfache Kurve in drei beliebigen Punktpaaren, dann besteht die Projektion der Kurve auf eine mit ν parallele Ebene aus drei hyperbolischen Ästen verschiedener Art samt einem innerhalb des Asymptotendreiecks liegenden Oval (29. a), dies giebt die Spezies I der Linien III. Ordnung.*)

b) Der Hauptkreis ν schneidet die einfache Kurve in einem beliebigen Punktpaar und berührt sie in einem zweiten; dies giebt in der Projektion zwei hyperbolisch-parabolische Äste mit einer Asymptote (29. b) nebst einem beigeordneten Oval. Spezies II.

c) Der Hauptkreis ν schneidet die einfache Kurve nur in Einem Punktpaar und die Zwillingskurve gar nicht, dann giebt die Projektion eine schlangenförmige Hyperbel (29. c) nebst beigeordnetem Oval. Spezies III.

d) Schneidet ν die einfache Kurve nur in Einem Punktpaar und berührt die Zwillingskurve, so erhält man eine schlangenförmige Hyperbel mit einer ihr beigeordneten Parabel. Spezies IV.

e) Schneidet endlich ν die einfache Kurve in einem Paar von Gegenpunkten und die Zwillingskurve in zwei Paaren, so erhält man eine schlangenförmige Hyperbel mit einer Asymptote und zwei hyperbolische Äste der I. Art mit zwei Asymptoten. Spezies V. Tritt hiebei der besondere Umstand ein, dass die drei Hauptkreise, welche die sphärische Kurve in den drei Paaren von Schnittpunkten berühren, sich in Einem Punktpaar schneiden, so schneiden sich in der Projektion die drei Asymptoten in Einem Punkt, Spezies VI, und wenn noch spezieller der Hauptkreis ν zusammenfällt mit der sphärischen Polare eines Paars von Wendepunkten, so wird der gemeinsame Schnittpunkt der drei Asymptoten zugleich ein Mittelpunkt der Kurve (4.). Spezies VII.

31. Lässt man aber den schneidenden Hauptkreis ν durch ein Paar von Wendepunkten F, F' gehen, so hat die Projektion der sphärischen

---

*) Siehe hinsichtlich der einzelnen Spezies die beigegebenen Figurentafeln Die einzelnen Figuren sind nach berechneten Beispielen gezeichnet (siehe die Beilage).

Kurve auf eine mit ν parallele Ebene stets einen Durchmesser, welcher die Projektion der sphärischen Polare des Wendepunkts F, F' ist (29. d). Dreht man den Hauptkreis ν um den Durchmesser FF', so können wir folgende acht charakteristische Lagen desselben unterscheiden.

a) Der Hauptkreis ν berühre die sphärische Kurve in dem Paar von Wendepunkten F, F', dann ist die Projektion auf eine mit ν parallele Ebene eine divergierende Parabel der ersten Art (16.). Spezies VIII.

b) Der Hauptkreis ν schneide die sphärische einfache Kurve ausser in F, F' noch in zwei weiteren Punktpaaren X, X' und Y, Y', so dass die Bögen FX und $F'Y$ (und also auch die Gegenbögen $F'X'$ und FY') keinen Wendepunkt enthalten, so besteht die Projektion der Kurve aus drei hyperbolischen Ästen, wovon zwei von der ersten Art und einer der zweiten Art ist (29.) nebst einem innerhalb des Asymptotendreiecks liegenden Oval. Spezies IX.

c) Fällt ν mit dem Wendekreis zusammen, so erhält man drei hyperbolische Äste der I. Art samt einem Oval innerhalb des Asymptotendreiecks. Da hier die drei Wendepunkte ins Unendliche fallen, so hat die Kurve drei im Centralpunkt sich schneidende Durchmesser (3.). Spezies X.

d) Schneidet aber ν die sphärische einfache Kurve ausser in F, F' noch in zwei Punktpaaren X, X' und Y, Y', so dass die Bögen FX und $F'Y$ (und also auch $F'X'$ und FY') je einen Wendepunkt enthalten, dann besteht die Projektion aus drei hyperbolischen Ästen, wovon der eine von der I. Art und die zwei andern von der III. Art sind, nebst einem innerhalb des Asymptotendreiecks liegenden Oval. Spezies XI.

e) Schneidet ν die sphärische einfache Kurve in F, F' und berührt sie noch in einem Paar von Gegenpunkten, so erhält man in der Projektion zwei hyperbolisch-parabolische Äste nebst beigeordnetem Oval. Species XII.

f) Schneidet ν die sphärische Kurve nur in dem Paar von Wendepunkten, ohne weitere Punktpaare mit ihr gemein zu haben, so wird die Projektion eine conchoïdale Hyperbel (29. d) nebst einem ihr beigeordneten Oval, welches auf der konvexen oder auf der konkaven Seite derselben liegt, je nachdem ν auf der einen oder der andern Seite der Zwillingskurve vorbeigeht. Spezies XIII und XIX.

g) Berührt der die sphärische Kurve in F, F' schneidende Hauptkreis ν die Zwillingskurve, so erhält man ebenso eine conchoïdale Hyperbel mit einer ihr zugeordneten parabolischen Kurve auf ihrer konvexen oder auf ihrer konkaven Seite. Spezies XIV und XVIII.

h) Schneidet ν die sphärische einfache Kurve in dem Paar von Wendepunkten F, F' und die Zwillingskurve in zwei weiteren Paaren von Punkten, so wird die Projektion aus einer conchoïdalen Hyperbel und zwei

hyperbolischen Ästen I. Art bestehen. Dabei liegt die auf dem Durchmesser der Kurve liegende Spitze des Asymptotendreiecks links oder rechts von der Asymptote der Conchoïde, Spezies XV und XVII, oder aber auch schneiden sich die drei Asymptoten in Einem Punkt. Spezies XVI.

Ein Überblick über die Figuren VIII—XIX zeigt, wie die einzelnen Formen ineinander übergehen, wenn der Hauptkreis ν von derjenigen Lage aus, in welcher er die sphärische Kurve in einem Paar von Wendepunkten berührt, um 180° gedreht wird.

§ 8.

Die zweite Hauptform der sphärischen Linien III. Ordnung und die aus ihr sich ergebenden dreizehn Arten ebener Kurven.

32. Die zweite Hauptform der sphärischen Linien III. Ordnung besteht aus einer einfachen Kurve mit drei Paaren von Wendepunkten und einem Paar isolierter Punkte. Ganz analog den bei der ersten Hauptform gemachten Unterscheidungen erhalten wir hier folgende charakteristische Lagen des schneidenden Hauptkreises ν, von welchem wir zunächst voraussetzen, dass er durch kein Paar von Wendepunkten gehe.

a) Der Hauptkreis ν schneidet die einfache sphärische Kurve in drei beliebigen Punktpaaren, dann besteht die Projektion der Kurve auf eine mit ν parallele Ebene aus drei hyperbolischen Ästen resp. der I., II., III. Art nebst einem innerhalb des Asymptotendreiecks liegenden isolierten Punkt. Spezies XX.

b) Der Hauptkreis ν schneidet die einfache Kurve in einem Punktpaar und berührt sie in einem zweiten, dann erhält man als Projektion zwei hyperbolisch-parabolische Äste samt einem isolierten Punkt. Spez. XXI.

c) Der Hauptkreis ν schneidet die sphärische Kurve nur in Einem Punktpaar, dann ist die Projektion eine schlangenförmige Hyperbel samt isoliertem Punkt. Spezies XXII.

d) Geht der Hauptkreis ν, welcher die einfache sphärische Kurve nur in Einem Punktpaar schneidet, zugleich durch das Paar isolierter Punkte, so erhält man in der Projektion eine schlangenförmige Hyperbel, bei welcher der isolierte Punkt im Unendlichen verschwunden ist. Spezies XXIII. Fällt dabei der Hauptkreis ν zusammen mit der sphärischen Polare eines Paars von Wendepunkten, so erhält man eine schlangenförmige Hyperbel, für welche der Schnittpunkt mit ihrer Asymptote zugleich ein Wendepunkt und Mittelpunkt ist (4.). Spezies XXIV.*)

---

*) Schneiden die Wendetangenten in W und W' die Asymptote in Z und Z' und die Polaren $T\alpha$ und $T\beta$ von W' und W resp. in T und T', und eine mit diesen

33. Geht aber der Hauptkreis ν durch ein Paar von Wendepunkten, so hat die Projektion wieder stets einen Durchmesser (29. d) und man kann dann folgende Lagen des Hauptkreises ν unterscheiden:

a) Der Hauptkreis ν berührt die sphärische Kurve in einem Paar von Wendepunkten, dann ist die Projektion derselben eine divergierende Parabel mit einem isolierten Punkt. Spezies XXV.

b) Der Hauptkreis ν schneidet die sphärische Kurve in einem Paar von Wendepunkten und in zwei weiteren Punktpaaren, dann erhält man in der Projektion ganz analog den Spezies IX, X, XI drei hyperbolische Äste samt einem innerhalb des Asymptotendreiecks liegenden isolierten Punkt, und zwar sind von den drei hyperbolischen Ästen entweder zwei von der I. Art und einer von der II. Art, Spezies XXVI, oder alle drei von der ersten Art, wobei die Kurve drei Durchmesser hat, Spezies XXVII, oder endlich zwei von der III. Art und einer von der I. Art. Spezies XXVIII.

c) Schneidet ν die sphärische Kurve in einem Paar von Wendepunkten und berührt sie zugleich in einem Paar von Gegenpunkten, so erhält man zwei hyperbolisch-parabolische Äste samt einem auf dem Durchmesser liegenden isolierten Punkt. Spezies XXIX.

d) Schneidet ν die sphärische Kurve nur in einem Paar von Wendepunkten, so erhält man eine conchoïdale Hyperbel mit einem isolierten Punkt auf ihrer konvexen oder auf ihrer konkaven Seite, Spezies XXX und XXXII. Geht aber ν zugleich durch das isolierte Punktpaar, so erhält man als Übergangsform zwischen den zwei zuletzt genannten eine conchoïdale Hyperbel, bei welcher der isolierte Punkt im Unendlichen verschwunden ist Spezies XXXI.*)

§ 9.

Die dritte Hauptform der sphärischen Linien III. Ordnung und die aus ihr sich ergebenden ebenen Linien III. Ordnung.

34. Bei der III. Hauptform der sphärischen Linien III. Ordnung haben wir (26.) drei verschiedene Fälle zu unterscheiden und zwar nehmen wir zuerst den Fall, wo die sphärische Linie eine durch die sechs beiderseits am Wendekreis liegenden Vierecke sich hinziehende einfache Kurve ist.

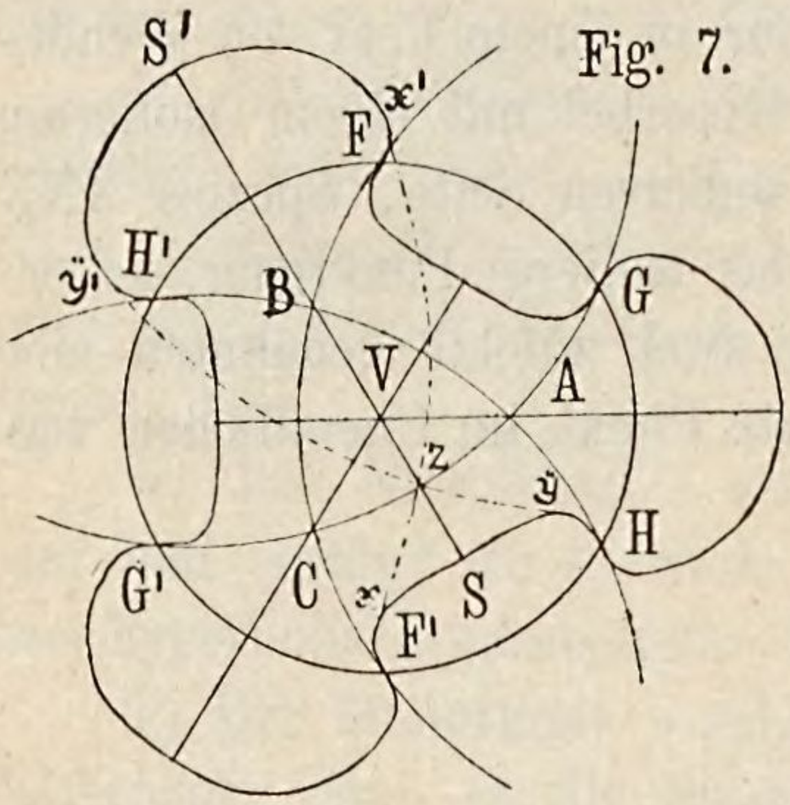
Polaren durch O gezogene Parallele in R und R', so zeigt eine nähere Untersuchung, dass $RT : TW : WZ = R'T' : T'W' : W'Z' = 1 : 2 : 6$.

*) Eine nähere Untersuchung dieser Kurve zeigt, dass bei ihr die Eigentümlichkeit besteht, dass $TB : BP : PO = 1 : 2 : 6$.

Wir unterscheiden hier wieder folgende Lagen des schneidenden Hauptkreises ν:

a) Der Kreis ν schneide die sphärische Kurve in drei beliebigen Punktpaaren. Wie in (29.) schliessen wir, dass die Projektion der Kurve aus drei hyperbolischen Ästen verschiedener Art besteht. Aber während bei den entsprechenden Fällen der I. und II. Hauptform der hyperbolische Ast I. Art stets in einem der Räume lag, welche durch die Verlängerung zweier Asymptoten über eine Spitze des Asymptotendreiecks hinaus gebildet werden, liegt jetzt der hyperbolische Ast I. Art bald in einem dieser genannten Räume, bald in einem der Räume, welche durch eine Seite des Asymptotendreiecks und die Verlängerung der beiden andern Seiten über diese erste hinaus begrenzt werden. Es hängt dies damit zusammen, dass wenn die einfache sphärische Kurve durch die sechs am Wendekreis liegenden Dreiecke sich hinzieht, dann von allen Punkten innerhalb des von den Wendeberührungskreisen gebildeten Dreiecks aus keine berührenden Kreise an die sphärische Kurve gelegt werden können, dagegen diese Beschränkung wegfällt, wenn die sphärische Kurve durch die sechs Vierecke sich hinzieht. Legt man nämlich (Fig. 7) durch den Schnittpunkt Z des Hauptkreises, welcher die Kurve im Wendepunkt GG' berührt, und der sphärischen Polare von GG' auf der Kugel zwei die Kurve in XX' und YY' berührende Hauptkreise, so wird man, weil die sphärische Polare die ganze Kurve in zwei symmetrische Hälften teilt, durch die drei Punktpaare GG', XX', YY' einen schneidenden Hauptkreis legen können, und die Projektion der Kurve auf eine mit diesem Hauptkreis parallele Ebene wird dann drei in Einem Punkt, der Projektion von Z, sich schneidende Asymptoten aufweisen. Nimmt man aber den Punkt Z auf der sphärischen Polare von GG' entweder zwischen dem Hauptkreis, welcher die Kurve in GG' berührt, und dem Scheitel S des Kurvenbogens $F'H$ an, oder aber zwischen diesem Hauptkreis und dem Punkt B, und legt dann wieder durch Z Hauptkreise, welche die Kurve in Punkten XX' und YY' berühren, so wird jetzt die Projektion der Kurve auf eine Ebene, welche dem schneidenden Hauptkreis durch GG', XX', YY' parallel ist, ein Asymptotendreieck aufweisen, welches im ersten Fall eine seiner Ecken, im zweiten eine seiner Seiten dem Bogen XY zukehrt, und es werden daher hinsichtlich der Lage des hyperbolischen Astes I. Art XY gegen das Asymptotendreieck in den beiden Fällen die oben angeführten Unter-

Fig. 7.



schiede stattfinden. Ganz ähnliche Schlüsse kann man aber auch dann noch machen, wenn der Punkt Z nicht mehr, wie bisher, der Einfachheit halber angenommen wurde, auf der sphärischen Polare von GG' liegt. — Wir unterscheiden daher Spezies XXXIII und Spezies XXXV, wozu als Übergangsform zwischen beiden Spezies XXXIV tritt, bei welcher die drei Asymptoten sich in Einem Punkt schneiden.

b) Schneidet ν die sphärische Kurve in einem Punktpaar und berührt sie in einem zweiten, so erhält man zwei hyperbolisch-parabolische Aste mit einer Asymptote. Spezies XXXVI.

c) Schneidet ν die sphärische Kurve nur in Einem Punktpaar, so erhält man eine schlangenförmige Hyperbel, Spezies XXXVII, und wenn ν zugleich zusammenfällt mit der harmonischen Polare eines Wendepunkts, so hat die schlangenförmige Hyperbel einen Mittelpunkt. Spezies XXXVIII.

35. Geht aber ν durch ein Paar von Wendepunkten F, F', so hat die Projektion stets einen Durchmesser, nämlich die Projektion der harmonischen Polare dieses Paars von Wendepunkten. Indem man ν um den Durchmesser FF' gedreht denkt, erhält man die Fälle:

a) ν berührt die Kurve in dem Paar von Wendepunkten, dann ist die Projektion eine divergierende Parabel der III. Art a) (19.). Dies ist Spezies XXXIX.

b) Schneidet ν die sphärische Kurve ausser in F, F' noch in zwei Punktpaaren, so erhält man drei hyperbolische Äste, und zwar einen der II. Art und zwei der I. Art, wobei wieder die beiden Fälle zu unterscheiden sind Spezies XL und XLII, je nachdem die zwei hyperbolischen Äste I. Art in Räumen liegen, welche durch die Verlängerung zweier Seiten des Asymptotendreiecks über eine Spitze oder über die dritte Seite hinaus gebildet werden. Als Übergangsform zwischen diesen beiden hat man dann Spezies XLI, wo die drei Asymptoten sich in Einem Punkt schneiden. Fällt ν mit dem Wendekreis selbst zusammen, so erhält man drei hyperbolische Äste I. Art an den Seiten des Asymptotendreiecks mit drei Durchmessern, Spezies XLIII. Wird dann ν im bisherigen Sinne weiter gedreht, so erhält man wieder drei hyperbolische Äste und zwar einen der I. und zwei der III. Art, wobei wiederum zu unterscheiden ist, ob der hyperbolische Ast I. Art in einem der Räume an den Seiten oder an den Spitzen des Asymptotendreiecks liegt, dies giebt Spezies XLIV und XLVI, nebst der Übergangsform zwischen beiden, Spezies XLV, bei welcher die drei Asymptoten sich in Einem Punkt schneiden.

c) Fallen von den drei Paaren von Schnittpunkten des Hauptkreises ν mit der sphärischen Kurve zwei Paare in ein Paar Berührungspunkte zusammen, so erhält man zwei hyperbolisch-parabolische Äste. Spezies XLVII.

d) Schneidet endlich ν die sphärische Kurve nur in dem Paar von Wendepunkten, so erhält man eine conchoïdale Hyperbel Spezies XLVIII.

36. Den 16 Spezies, welche sich bei dem ersten Fall der dritten Hauptform ergeben, stehen 10 Spezies bei dem zweiten Fall der dritten Hauptform gegenüber, bei welcher sich die sphärische Kurve durch die sechs am Wendekreis liegenden Dreiecke hinzieht. Indem man ganz den Gang in 34. und 35. wiederholt, erhält man hier Spezies XLIX—LVIII. Die 10 Spezies dieses Falles unterscheiden sich von den analogen Spezies des vorigen Falles nur dadurch, dass von sämtlichen Punkten, welche innerhalb des von den drei Wendetangenten gebildeten Dreiecks liegen, keine Tangenten mehr an die Kurve gezogen werden können. Vgl. 29. a.

37. Auch bei dem dritten Fall der dritten Hauptform der sphärischen Linien III. Ordnung, wo die drei die Kurve in den Paaren von Wendepunkten berührenden Hauptkreise sich in Einem Punktpaar schneiden. erhält man auf dieselbe Weise 10 verschiedene Spezies, nämlich Spezies LIX—LXVIII, bei welchen sich die drei Wendetangenten in Einem Punkt schneiden.

§ 10.

Die IV. Hauptform der sphärischen Linien III. Ordnung und die aus ihr sich ergebenden ebenen Linien III. Ordnung.

38. Die IV. Hauptform der sphärischen Linien III. Ordnung besteht aus einer einfachen Kurve mit einem Paar von Wendepunkten und einem Paar von Doppelpunkten. Hinsichtlich der Lage eines die Kurve schneidenden Hauptkreises sind hier folgende Fälle zu unterscheiden:

a) Der Hauptkreis ν schneide die Kurve in drei beliebigen Punktpaaren, von denen aber keines auf dem Paar von Schleifen liegt, welche durch die Doppelpunkte von dem übrigen Teil der Kurve abgetrennt werden; dann besteht die Projektion der Kurve aus drei hyperbolischen Ästen; der eine derselben ist von der I. Art, der andere von der III. und der dritte bildet eine Schleife mit zwei ins Unendliche laufenden Zweigen. Spezies LXIX.

b) Fallen von den drei Paaren von Schnittpunkten zwei Paare in ein Paar von Berührungspunkten zusammen, so erhält man zwei hyperbolisch-parabolische Äste mit einer Asymptote, von denen der eine einen Wendepunkt, der andere einen Doppelpunkt und eine Schleife hat. Spezies LXX.

c) Schneidet der Hauptkreis ν die Kurve nur in einem einzigen Punktpaar, so erhält man eine schlangenförmige Hyperbel mit einer Schleife. Spezies LXXI.

d) Schneidet aber ν die Kurve so in drei Punktpaaren, dass zwei derselben auf dem Schleifenpaar liegen, so giebt die Projektion drei hyperbolische Äste, von denen zwei sich kreuzen. Der eine der zwei sich kreuzenden Äste ist von der I. Art, der andere von der III. Art, während der dritte Ast stets von der I. Art ist. Der Kreuzungspunkt selbst liegt entweder in einem der Räume an den Spitzen des Asymptotendreiecks, Spezies LXXII, oder in einem der Räume an den Seiten des Asymptotendreiecks, Spezies LXXIV, wozu als Übergangsfall noch Spezies LXXIII kommt, wo die drei Asymptoten sich in Einem Punkt schneiden.

e) Fallen die beiden Paare von Schnittpunkten, die auf dem Schleifenpaar liegen, zusammen in ein Paar von Berührungspunkten, so erhält man ein Paar sich kreuzender hyperbolisch-parabolischer Äste. Spezies LXXV.

39. Geht aber der Hauptkreis ν durch das Paar von Wendepunkten, so hat die Projektion der sphärischen Kurve stets einen Durchmesser, welcher die Projektion der harmonischen Polare des Wendepunktpaares ist. Man hat hier folgende Fälle zu unterscheiden:

a) Der Hauptkreis ν berührt die sphärische Kurve in dem Paar von Wendepunkten, dann ist die Projektion eine divergierende Parabel der IV. Art. Spezies LXXVI.

b) Schneidet ν die Kurve in zwei weiteren, aber nicht auf dem Schleifenpaar liegenden Punktpaaren, dann erhält man drei hyperbolische Äste mit drei Asymptoten; zwei der Äste sind von der I. Art und der dritte besteht aus einer Schleife mit zwei unendlichen Zweigen. Spezies LXXVII.

c) Fällt ν mit dem durch das Paar von Wendepunkten und das Paar von Doppelpunkten bestimmten Hauptkreis zusammen, so erhält man als Projektion drei hyperbolische Äste der I. Art mit drei Asymptoten, von denen aber zwei parallel sind. Spezies LXXVIII.

d) Schneidet ν die sphärische Kurve ausser in den Wendepunkten noch in zwei auf dem Schleifenpaar liegenden Punktpaaren, so erhält man drei hyperbolische Äste der I. Art, von denen aber zwei sich kreuzen und zwar liegt der Kreuzungspunkt entweder in einem der Räume an den Spitzen des Asymptotendreiecks, Spezies LXXIX, oder in einem der Räume an den Seiten des Asymptotendreiecks, Spezies LXXXI, wozu als Übergangsform zwischen diesen beiden noch Spezies LXXX kommt, bei welcher die drei Asymptoten sich in Einem Punkt schneiden.

e) Schneidet ν die Kurve in dem Paar von Wendepunkten und berührt sie in einem auf dem Schleifenpaar gelegenen Punktpaar, so erhält man zwei sich kreuzende hyperbolisch-parabolische Äste mit einer Asymptote. Spezies LXXXII.

f) Schneidet ν die Kurve nur in dem Paar von Wendepunkten, so erhält man eine conchoïdale Hyperbel mit einer Schleife. Spezies LXXXIII.

40. Geht endlich der Hauptkreis ν durch das Paar von Doppelpunkten, so kann man noch folgende Lagen desselben unterscheiden:

a) Der Hauptkreis ν schneidet die Kurve noch in einem weiteren, aber nicht auf dem Schleifenpaar liegenden Punktpaar, dann erhält man in der Projektion drei hyperbolische Äste, einen der III. Art und zwei der I. Art mit drei Asymptoten, von denen aber zwei parallel sind. Spezies LXXXIV.

b) Fällt aber das weitere Paar von Schnittpunkten auf das Schleifenpaar, so erhält man in der Projektion drei hyperbolische Äste mit drei Asymptoten, von welchen zwei parallel sind; zwei der drei hyperbolischen Äste sind von der I. Art, der dritte hat einen Wendepunkt und liegt zwischen den beiden parallelen Asymptoten, Spezies LXXXV, und wenn ν zugleich zusammenfällt mit der harmonischen Polare des Wendepunkts, so hat die Projektion einen Mittelpunkt. Spezies LXXXVI.

c) Berührt ν die sphärische Kurve in dem Paar von Doppelpunkten, so erhält man in der Projektion zwei hyperbolisch-parabolische Äste mit einer beide trennenden Asymptote. Die Zweige des einen Astes konvergieren nach derselben Richtung, die des andern divergieren. Es ist dies die sogenannte Tridenskurve. Spezies LXXXVII.

§ 11.

Die fünfte Hauptform der sphärischen Linien III. Ordnung und ihre Projektionen.

41. Die fünfte Hauptform der sphärischen Linien III. Ordnung besteht aus einer einfachen Kurve mit einem Paar von Wendepunkten und einem Paar von Rückkehrpunkten. Hinsichtlich der Lage eines schneidenden Hauptkreises unterscheiden wir wieder folgende Fälle:

a) Der Hauptkreis ν schneidet die Kurve in drei beliebigen Punktpaaren, dann erhält man in der Projektion drei hyperbolische Äste mit drei Asymptoten, der eine Ast ist von der I. Art, der zweite von der III. Art und der dritte besteht aus zwei in einem Rückkehrpunkt zusammenhängenden unendlichen Zweigen. Spezies LXXXVIII.

b) Fallen von den drei Paaren von Schnittpunkten zwei Paare in ein Paar Berührungspunkte zusammen, so erhält man zwei hyperbolisch-parabolische Äste mit einer Asymptote; der eine dieser Äste hat einen Wendepunkt, der andere einen Rückkehrpunkt. Spezies LXXXIX.

c) Schneidet ν die Kurve nur in Einem Punktpaar, so erhält man eine schlangenförmige Hyperbel mit einem Rückkehrpunkt. Spezies XC.

42. Wenn der Hauptkreis ν durch das Paar von Wendepunkten geht, so hat die Projektion einen Durchmesser (3) und dabei giebt es noch folgende Fälle:

a) Berührt ν die sphärische Kurve in dem Paar von Wendepunkten, dann ist die Projektion eine divergierende Parabel der V. Art mit Rückkehrpunkt. Spezies XCI.

b) Schneidet aber ν, ausser in dem Paar von Wendepunkten, noch in zwei weiteren Punktpaaren, dann erhält man drei hyperbolische Äste mit drei Asymptoten; zwei der drei Äste sind von der I. Art und der dritte besteht aus zwei unendlichen, in einem Rückkehrpunkt zusammenhängenden Zweigen. Spezies XCII.

c) Fällt ν mit dem durch das Paar von Wendepunkten und das Paar von Rückkehrpunkten bestimmten Hauptkreis zusammen, so erhält man zwei hyperbolische Äste mit zwei Asymptoten. Die beiden hyperbolischen Äste liegen auf derselben Seite derjenigen Asymptote, welche durch den unendlich fernen Wendepunkt geht, dagegen auf verschiedenen Seiten der andern durch den unendlich fernen Rückkehrpunkt gehenden Asymptote. Spezies XCIII.

d) Schneidet aber ν die sphärische Kurve nur in dem Paar von Wendepunkten, so wird die Projektion eine conchoïdale Hyperbel mit einem Rückkehrpunkt, Spezies XCIV. Es ist dies die unter dem Namen Cissoïde bekannte Kurve.

43. Geht endlich ν durch das Paar von Rückkehrpunkten, so giebt es noch zwei Fälle:

a) ν schneidet die Kurve ausser in dem Paar von Rückkehrpunkten noch in einem Punktpaar, dann erhält man in der Projektion zwei hyperbolische Äste mit zwei Asymptoten, und zwar nähern sich die beiden Äste der einen Asymptote nach derselben Richtung, aber auf verschiedenen Seiten und der andern Asymptote nach entgegengesetzten Richtungen und auf verschiedenen Seiten. Dies ist Spezies XCV.

b) Berührt aber ν die sphärische Kurve in dem Paar von Rückkehrpunkten, und fällt daher zusammen mit der harmonischen Polare des Wendepunkts, so erhält man als Projektion die kubische Parabel, welche einen Mittelpunkt hat. Spezies XCVI.

§ 12.

Überblick über die Einteilung der ebenen Linien III. Ordnung und Vergleichung derselben mit der Newtonschen Einteilung.

44. Wir haben die einzelnen Arten der Linien III. Ordnung erhalten, indem wir bei jeder der fünf Hauptformen der sphärischen Linien III. Ordnung charakteristische Lagen eines schneidenden Hauptkreises annahmen und die sphärische Kurve auf Ebenen projizierten, welche den Ebenen dieser Hauptkreise parallel waren.

Obgleich nun aber der Übergang von einer charakteristischen Lage eines schneidenden Hauptkreises zu einer zweiten solchen durch unendlich viele Zwischenstufen erfolgt und dementsprechend auch der Übergang von einer Spezies einer ebenen Linie III. Ordnung zu einer zweiten, so wird man doch hinsichtlich der charakteristischen Lagen des schneidenden Hauptkreises und damit der charakteristischen Formen der entsprechenden ebenen Kurven keine weiteren wesentlichen Unterscheidungen machen können. Der Übergang von einer Spezies zur andern vermittelt sich nur durch quantitative Verschiedenheiten hinsichtlich der Grösse des Asymptotendreiecks oder des mehr oder weniger weiten Hinausrückens der Schnittpunkte der Kurve mit den Asymptoten und dergleichen, keineswegs aber werden in den Zwischenstufen Änderungen in der Art der hyperbolischen oder parabolischen Äste eintreten. Es wird daher auch keine weiteren Formen der ebenen Linien III. Ordnung als die aufgeführten geben.

45. Dabei ist noch an Folgendes zu erinnern. Unmittelbar aus der Art und Weise, wie wir bei jeder der Hauptformen der sphärischen Linien III. Ordnung die einzelnen Spezies der ebenen Linien abgeleitet haben, geht hervor, dass sämtliche aus derselben Hauptform entstandenen Spezies unter sich kollineär sind, vorausgesetzt dass sie aus einer und derselben sphärischen Linie abgeleitet sind. Aber bei jeder der fünf Hauptformen giebt es unendlich viele verschiedene Individuen, und diese sind unter sich nur dann immer kollineär, wenn sie entweder der II. Hauptform oder der III., Fall c), oder der IV. oder der V. Hauptform angehören, dagegen wenn sie der I. Hauptform oder der III., Fall a) und b), angehören, sind sie im Allgemeinen nicht kollineär (16.—26.). Demgemäss werden also ebene Linien III. Ordnung, welche derselben Gattung angehören, nur dann stets kollineär sein, wenn diese Gattung der II. Hauptform der sphärischen Linien III. Ordnung entspricht oder der III., Fall c), oder der IV. oder der V. Hauptform.

46. Wir haben fünf, beziehungsweise sieben Gattungen ebener Linien III. Ordnung unterschieden und bei der ersten Gattung 19, bei der zweiten 13, bei der dritten a), b), c) resp. 16, 10, 10; bei der vierten 19 und bei der fünften 9 Spezies unterschieden, also im Ganzen 96, während *Newton* nur 72 aufzählt, woher kommt diese Differenz von 24 Spezies?

Zunächst ist zu bemerken, dass *Newton* bei seiner Einteilung 6 Spezies übersehen hat, welche er nach Analogie seines sonstigen Verfahrens hätte aufnehmen sollen.

Aus der Gleichung:

$$xy^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

ergeben sich nämlich unter der von *Newton* gemachten Voraussetzung, dass die drei Wurzeln der Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = o$ sämtlich reell, verschieden und mit demselben Vorzeichen behaftet sind, die von uns mit IX und XI bezeichneten Spezies je nachdem $4ac \gtrless b^2$, bei *Newton* fehlt aber Spezies XI.

Ebenso ergeben sich durch dieselbe Unterscheidung, wenn von den drei reellen Wurzeln die zwei kleinsten als gleich und die dritte mit demselben Vorzeichen behaftet vorausgesetzt werden, die zwei von uns mit XXVI und XXVIII bezeichneten Spezies, deren letztere bei *Newton* fehlt.

Existiert aber bei der Gleichung:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = o$$

die Relation $b^2 = 4ac$, so ergeben sich, wenn sämtliche Wurzeln reell, verschieden und mit demselben Vorzeichen behaftet sind, oder wenn die zwei kleineren Wurzeln gleich sind und die dritte dasselbe Vorzeichen hat, resp. die Spezies X und XXVII, welche beide bei *Newton* fehlen.

Endlich wenn in der obigen Gleichung $a = o$ ist und also $bx^2 + cx + d = o$, ergiebt sich, wenn beide Wurzeln verschieden, aber beide negativ sind, die Spezies XII, und wenn beide Wurzeln gleich und negativ sind, die Spezies XXIX. Auch diese beiden Spezies finden sich bei *Newton* nicht.

Fügen wir die 6 fehlenden Spezies zu den 72 *Newton*schen hinzu, so erklärt sich die immer noch vorhandene Differenz von 18 Spezies dadurch, dass *Newton* bei den divergierenden Parabeln der dritten Art (parabola pura) die drei verschiedenen Fälle nicht besonders unterscheidet. In der That befindet sich unter den 10 Spezies, welche wir sowohl aus dem zweiten als aus dem dritten Fall der III. Hauptform der sphärischen Linien III. Ordnung abgeleitet haben, je nur eine, nämlich Spezies LV und LXV, welche der äusseren Form nach nicht schon unter den 16 Spezies des ersten Falles der III. Hauptform vertreten wäre; diese zwei Spezies werden auch von *Newton* aufgeführt, aber die 2 . 9 anderen nicht.

Die drei Fälle bei den divergierenden Parabeln III. Art und demgemäss bei den sphärischen Linien der dritten Hauptform auseinander zu halten, scheint aber geboten, weil die Lage der sphärischen Kurve gegen die drei in den Paaren von Wendepunkten berührenden Hauptkreise in den drei Fällen wesentlich verschieden ist und weil von einem Kollineationsverhältnis bei sphärischen Kurven, welche verschiedenen der drei Fälle der dritten Hauptform angehören und damit auch bei den entsprechenden ebenen Kurven keine Rede sein kann.

Anhang.

Kurze Darlegung der Newton schen Einteilung der Linien III. Ordnung.

Wir haben in dem *Newton* schen Satz, dass sämtliche Linien III. Ordnung als Projektionen der fünf divergierenden Parabeln aufgefasst werden können, den Fundamentalsatz für eine Einteilung dieser Linien nach rein geometrischen Gesichtspunkten kennen gelernt. Aber auch *Newtons* Aufzählung der 72 Arten verschiedener Linien, bei welcher er von dem obigen Satz keinen Gebrauch macht, hat so viel Originelles, dass es manchem Leser nicht unwillkommen sein dürfte, hier einen Überblick über diese Aufzählung zu erhalten, zumal da *Newton* fast immer nur die Resultate ohne nähere Begründung mitteilt.

1. *Newton* giebt als die vier Hauptfälle der Gleichungen der Linien III. Ordnung, unter welchen alle besonderen Fälle begriffen sind, die folgenden an:

$$1) \quad xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$2) \quad xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$3) \quad y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$4) \quad y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Wie gelangt man zu diesen vier Gleichungen *Newtons*?

Bezieht sich die allgemeinste Gleichung III. Grades zwischen den Veränderlichen x und y:

$$o = A + Bx + Cy + Dx^2 + Ey^2 + Fxy + Gx^3 + Hy^3 + Kx^2y + Lxy^2$$

auf ein Koordinatensystem, dessen Axen irgend einen Winkel γ einschliessen, so kann man diese Gleichung dadurch, dass man das Koordinatensystem um seinen Ursprung um einen gewissen Winkel φ dreht, stets auf eine

Form bringen, in welcher das Glied mit y^3 (oder x^3) fehlt. Denn durch Anwendung der Transformationsformeln:

$$x = \frac{x' \sin(\gamma - \varphi) - y' \sin \varphi}{\sin \gamma} \quad , \quad y = \frac{y' \sin(\gamma + \varphi) + x' \sin \varphi}{\sin \gamma}$$

wird der Coëfficient von y'^3:

$$-G\frac{\sin^3 \varphi}{\sin^3 \gamma} + H\frac{\sin^3(\gamma+\varphi)}{\sin^3 \gamma} + K\frac{\sin^2 \varphi \sin(\gamma+\varphi)}{\sin^3 \gamma} - L\frac{\sin \varphi \sin^2(\gamma+\varphi)}{\sin^3 \gamma}$$

Entwickelt man $\sin(\gamma + \varphi)$ und führt dann $tg\ \varphi$ statt $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ ein, so erhält man einen in Beziehung auf $tg\ \varphi$ kubischen Ausdruck, für welchen es also mindestens einen reellen Wert von φ giebt, welcher ihn zu Null macht. Durch Einführung dieses Wertes kann daher die obige Gleichung stets auf die Form gebracht werden:

A) $$o = A' + B'x + C'y + D'x^2 + E'y^2 + F'xy + G'x^3 + K'x^2y + L'xy^2$$

und diese Gleichung umfasst noch alle Linien III. Ordnung. — Sämtliche durch die Gleichung A) vorgestellten Kurven haben, solange L' nicht der Null gleich ist, die Gerade $E' + L'x = 0$ zur Asymptote. Macht man diese Asymptote zur Ordinatenaxe, indem man $x - \frac{E'}{L'}$ statt x setzt, so fällt das Glied mit y^2 heraus und man erhält, indem man noch die ganze Gleichung durch den Coëfficienten von xy^2 dividiert, eine Gleichung von der Form:

B) $$o = A'' + B''x + C''y + D''x^2 + F''xy + G''x^3 + K''x^2y + xy^2.$$

Diese Gleichung ist quadratisch in Beziehung auf y; jede Gerade parallel der Ordinatenaxe, welche zugleich Asymptote ist, schneidet die Kurve (ausser in dem unendlich fernen Punkt der y-Axe) in zwei Punkten, und der geometrische Ort der Halbierungspunkte aller mit der y-Axe parallelen Sehnen der Kurve ist die Hyperbel $2xy + K''x^2 + F''x + C'' = 0$, deren Mittelpunkt die Koordinaten $x = 0$, $y = -\frac{F''}{2}$ hat und deren Asymptoten die Gleichungen haben: $x = 0$ und $y = -\frac{K''}{2}x - \frac{F''}{2}$. Macht man den Mittelpunkt dieser Hyperbel zum Koordinatenursprung und ihre Asymptoten zu Koordinatenaxen*), so fallen aus der Gleichung B) die

---

*) Ist γ der Winkel der Koordinatenaxen, auf welche die Gleichung B) bezogen ist, und φ der Winkel, welchen die Asymptote der Hyperbel $y = -\frac{K''}{2}x - \frac{F''}{2}$ mit der x-Axe bildet, so ist zu setzen: $x = \frac{x' \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \gamma}$ und $y = y' + \frac{x' \sin \varphi}{\sin \gamma} - \frac{F''}{2}$

Glieder mit xy und x^2y heraus und man erhält eine Gleichung von der Form:

$$\text{I.} \quad xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

und dies ist der erste Hauptfall *Newtons.*

Auf diese Gleichung I. kommt man aber auch dann noch, wenn in der Gleichung A) der Coëfficient $L' = 0$ ist, wenn nur nicht zugleich $K' = 0$ ist. Denn die durch die Gleichung:

$$0 = A + Bx + Cy + Dx^2 + Ey^2 + Fxy + Gx^3 + Kx^2y$$

vorgestellten Kurven haben zwar keine Asymptote parallel der y-Axe mehr, wohl aber ist die Gerade $y = Mx + Q$ Asymptote, wenn $M = -\frac{G}{K}$ und $Q = -\frac{DK^2 + EG^2 - FGK}{K^3}$. Behält man den Koordinatenursprung und die x-Axe bei, führt aber eine Ordinatenaxe parallel der Asymptote ein*), so erhält man eine neue Gleichung von der Form der Gleichung A), in welcher der Coëfficient von xy^2 den Wert $\frac{GK^2}{G^2 - GK\cos\gamma + K^2}$ hat und also nicht $= 0$ ist, so lange weder G noch K der Null gleich sind, und diese Gleichung kann dann wie früher auf die Form I. gebracht werden.

Wäre aber $G = 0$ gewesen, so hätte man statt der vorigen Asymptote eine solche parallel der x-Axe erhalten, nämlich $y = -\frac{D}{K}$. Würde man diese Asymptote zur x-Axe machen, so würde das Glied mit x^2 herausfallen und man erhielte eine Gleichung von der Form:

$$0 = A' + B'x + C'y + E'y^2 + F'xy + x^2y.$$

---

oder da $tg\,\varphi = \frac{\frac{K''}{2}\sin\gamma}{\frac{K''}{2}\cos\gamma - 1}$ ist, $x = \mp\frac{x'}{\sqrt{\frac{K''^2}{4} + 1 - K''\cos\gamma}}$ und

$$y = y' \pm \frac{\frac{K''}{2}x}{\sqrt{\frac{K''^2}{4} + 1 - K\cos\gamma}} - \frac{F''}{2}, \text{ etc.}$$

*) Bezeichnet man den Winkel der Asymptote mit der x-Axe durch φ, während wieder γ der Winkel der Koordinatenaxen ist, auf welche sich die Gleichung bezieht, so ist zu setzen:

$$x = x' + y'\frac{\sin(\gamma - \varphi)}{\sin\gamma}, \quad y = y'\frac{\sin\varphi}{\sin\gamma} \text{ oder da } tg\,\varphi = \frac{G\sin\gamma}{G\cos\gamma - K} \text{ ist:}$$

$$x = x' \mp \frac{Ky'}{\sqrt{G^2 - 2GK\cos\gamma + K^2}}, \quad y = \pm\frac{Gy'}{\sqrt{G^2 - 2GK\cos\gamma + K^2}}, \text{ etc.}$$

Vertauscht man aber die x-Axe und die y-Axe gegenseitig, so erhält man eine Gleichung, welche in der obigen Gleichung B) enthalten ist und wie diese auf die Form I. gebracht werden kann.

Somit sieht man, dass die Gleichung A) stets auf die Form I. gebracht werden kann, so lange in derselben nicht gleichzeitig die Glieder mit x^2y und xy^2 fehlen. Fehlen aber diese beiden Glieder, oder liegt also eine Gleichung vor von der Form:

$$\text{C)} \quad 0 = A + Bx + Cy + Dx^2 + Ey^2 + Fxy + Gx^3$$

so haben die durch diese Gleichung vorgestellten Kurven überhaupt keine Asymptote mehr ausser wenn $E = 0$. Ist $E = 0$, so ist die Gerade $Fx + C = 0$ eine Asymptote, und wenn man diese zur Ordinatenaxe macht, d. h. wenn $x - \frac{C}{F}$ statt x in die Gleichung substituiert, so fällt in der neuen Gleichung auch das Glied mit y heraus und es bleibt eine Gleichung von der Form:

$$\text{II.} \quad xy = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

dies ist der zweite Hauptfall *Newtons*.

Ist aber in der Gleichung C) der Coëfficient E nicht der Null gleich, so giebt es keine Asymptote parallel der y-Axe mehr, aber auch keine Asymptote parallel der x-Axe oder parallel irgend einer Geraden $y = Mx$ denn dann müsste der Coëfficient G der Null gleich sein und somit wäre die Gleichung C) gar nicht mehr vom dritten Grad. Dagegen zeigt die Gleichung C), dass eine Gerade parallel der y-Axe die Kurve stets nur in zwei im Endlichen liegenden Punkten schneiden kann und dass der geometrische Ort der Halbierungspunkte aller mit der y-Axe parallelen Sehnen die Gerade $y = -\frac{Fx + C}{2E}$ ist. Geht man auf ein neues Koordinatensystem über, indem man die y-Axe beibehält und den Koordinatenursprung längs derselben um die Strecke $-\frac{C}{2E}$ verschiebt und dann die x-Axe um den Winkel φ dreht, welchen die Gerade $y = -\frac{Fx + C}{2E}$ mit ihr bildet*), so fallen in der neuen Gleichung die Glieder mit xy und y heraus und

---

*) Es ist zu setzen: $x = \frac{x' \sin(\gamma - \varphi)}{\sin\gamma}$, $y = y' + \frac{x \sin\varphi}{\sin\gamma} - \frac{C}{2E}$ oder da $tg\,\varphi = \frac{F \sin\gamma}{F\cos\gamma - 2E}$ ist:

$$x = \mp \frac{2Ex'}{\sqrt{F^2 - 4EF\cos\gamma + 4E^2}},\quad y = y' \pm \frac{Fx'}{\sqrt{F^2 - 4EF\cos\gamma + 4E^2}} - \frac{C}{2E},\ \text{etc.}$$

man erhält eine Gleichung von der Form:

$$\text{III.} \quad y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Dies ist der dritte Hauptfall *Newtons.*

Endlich wenn in der obigen Gleichung A) die Glieder mit y^2, xy, x^2y und xy^2 fehlen, so bleibt eine Gleichung von der Form:

$$\text{IV.} \quad y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

und dies ist der vierte *Newton*sche Hauptfall.

2. Nachdem *Newton* die vier Hauptfälle der Gleichungen der Linien III. Ordnung aufgestellt hat, unterscheidet er bei dem ersten Hauptfall verschiedene Gruppen von Kurven, je nach der Anzahl der ihnen zukommenden Asymptoten und deren gegenseitiger Lage. Im Allgemeinen haben nämlich die durch die Gleichung:

$$\text{I.} \quad xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

vorgestellten Kurven die drei Asymptoten:

$$x = 0 \quad , \quad y = \sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \quad , \quad y = -\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}},$$

welche stets vorhanden sind so lange a positiv ist und ein Dreieck einschliessen so lange b nicht der Null gleich ist. Ist aber $b = 0$, so gehen die drei Asymptoten durch Einen Punkt, den Koordinatenursprung.

Zieht man Sehnen parallel mit einer Asymptote, so ist der geometrische Ort ihrer Halbierungspunkte im Allgemeinen eine Hyperbel. So ist der geometrische Ort der Halbierungspunkte der mit der ersten Asymptote parallelen Sehnen die Hyperbel $2xy + e = 0$. Ist aber $e = 0$, so erhält man statt der Hyperbel die Gerade $y = 0$, welche dann ein Durchmesser der Kurve heisst. Als Ort der Halbierungspunkte der Sehnen, welche mit der zweiten oder dritten Asymptote parallel sind, erhält man die durch das Doppelzeichen unterschiedenen Hyperbeln:

$$3ax^2 - y^2 \mp 2\sqrt{a}xy + 2bx + c \mp e\sqrt{a} = 0,$$

welche aber je in zwei Gerade zerfallen, wenn die Relation besteht: $b^2 - 4ac \pm 4ae\sqrt{a} = 0$. Von diesen zwei Geraden stellt dann je eine den gesuchten Ort vor und heisst wieder ein Durchmesser. Besteht die genannte Relation, so sind die Gleichungen dieser Durchmesser:

$$y \pm 3\sqrt{a} \,.\, x \pm \frac{b}{2\sqrt{a}} = 0.$$

Dabei ist leicht nachzuweisen, dass wenn es ein Asymptotendreieck giebt, ein etwa vorhandener Durchmesser stets eine Schwerlinie desselben ist

und dass also, falls drei Durchmesser vorhanden sind, sich dieselben im Schwerpunkt des Asymptotendreiecks schneiden.

Es lassen sich nun bei dem ersten Hauptfall folgende Gruppen unterscheiden:

A) Wenn in der Gleichung

$$\text{I.} \quad xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + ex + d$$

der Coëfficient a positiv und b nicht der Null gleich ist, so heisst die Kurve eine Hyperbel III. Ordnung (hyperbola redundans) mit drei ein Dreieck einschliessenden Asymptoten, und zwar hat dieselbe

a) keinen Durchmesser, so lange weder $e = 0$, noch $b^2 - 4ac \pm 4ae\sqrt{a} = 0$;

b) Einen Durchmesser, wenn entweder $e = 0$ oder $b^2 - 4ac + 4ae\sqrt{a} = 0$ oder $b^2 - 4ac - 4ae\sqrt{a} = 0$. Da es aber keinen wesentlichen Unterschied macht, welche der drei Schwerlinien des Asymptotendreiecks einen Durchmesser bildet, so genügt es, bloss den Fall $e = 0$ in Betracht zu ziehen;

c) drei Durchmesser, wenn sowohl $e = 0$ als $b^2 - 4ac \pm 4ae\sqrt{a} = 0$ d. h. also wenn $e = 0$ und $b^2 - 4ac = 0$.

B) Ist in der Gleichung I. a positiv und $b = 0$, so gehen die drei Asymptoten durch den Ursprung und man hat Hyperbeln III. Ordnung mit drei in Einem Punkt sich schneidenden Asymptoten und zwar haben dieselben

a) keinen Durchmesser, so lange e nicht der Null gleich ist;
b) Einen Durchmesser, wenn $e = 0$;
c) drei Durchmesser, wenn $e = 0$ und $c = 0$.

C) Wenn in der Gleichung I. der Coëfficient a negativ ist, so ist nur noch eine Asymptote, die y-Axe, vorhanden und die Kurve heisst dann eine Defektive Hyperbel und zwar

a) ohne Durchmesser, wenn e nicht der Null gleich ist;
b) mit Einem Durchmesser, wenn $e = 0$;

D) Ist in der Gleichung I. $a = 0$, aber nicht zugleich $b = 0$, so ist wiederum nur Eine Asymptote, die y-Axe vorhanden. Andererseits aber zeigt die nach y aufgelöste Gleichung:

$$y = -\frac{e}{2x} \pm \sqrt{bx + c + \frac{d}{x} + \frac{e^2}{4x^2}}$$

dass zu einem unendlich grossen x auch ein unendlich grosses y gehört;

die Kurve muss daher auch parabolische Zweige haben und heisst eine parabolische Hyperbel und zwar wieder

a) ohne Durchmesser, so lange e nicht der Null gleich ist;
b) mit Einem Durchmesser, wenn $e = 0$.

E) Ist endlich in der Gleichung I. sowohl $a = 0$, als $b = 0$, so hat man eine Gleichung von der Form:

$$xy^2 + ey = cx + d.$$

Jede durch diese Gleichung vorgestellte Kurve nennt *Newton* einen Hyperbolismus*) des Kegelschnittes $y^2 + ey = cx^2 + dx$, welcher eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel vorstellt, je nachdem c positiv, negativ oder $= 0$ ist.

Dementsprechend giebt es:

a) Hyperbolismen der Hyperbel mit den drei Asymptoten: $x = 0$, $y = +\sqrt{c}$, $y = -\sqrt{c}$;
b) Hyperbolismen der Ellipse mit Einer Asymptote: $x = 0$.
c) Hyperbolismen der Parabel mit zwei Asymptoten, $x = 0$ und $y = 0$.

Auch bei jedem der drei Hyperbolismen ist ein Durchmesser vorhanden, falls $e = 0$.

3. Bei jeder dieser Gruppen des ersten Hauptfalles ergeben sich dann bei *Newton* die einzelnen Spezies dadurch, dass die Gleichung der betreffenden Gruppe nach y aufgelöst wird und die verschiedenen Fälle untersucht werden, welche hinsichtlich der Wurzeln des entstehenden Radicanden möglich sind. So ist z. B. bei der Gruppe A) a):

$$y = \frac{-\frac{e}{2} \pm \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{e^2}{4}}}{x}$$

Hinsichtlich der Wurzeln von:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{e^2}{4} = 0$$

kann man aber unterscheiden, ob die vier Wurzeln sämtlich reell und verschieden, oder ob zwei oder gar drei einander gleich sind (alle vier können

---

*) *Newton* nennt überhaupt den Hyperbolismus einer Linie diejenige Kurve, deren Gleichung aus der Gleichung der gegebenen Linie hervorgeht, wenn man in dieser jedes vorkommende y noch mit x multipliziert. So ist z. B. der Hyperbolismus der Geraden $y = Mx + C$, die Hyperbel $xy = Mx + C$ und der Hyperbolismus des Kegelschnitts $y^2 + ey = cx^2 + dx$ die Kurve: $x^2y^2 + exy = cx^2 + dx$ d. h. $xy^2 + ey = cx + d$.

nicht gleich sein, weil sonst die Gleichung I. in die Gleichungen eines Kegelschnitts und einer Geraden zerfallen würde); ferner ob zwei Wurzeln reell und zwei imaginär sind, ob die Wurzeln dasselbe Vorzeichen haben oder nicht u. s. w. Die Bedeutung der Wurzelwerte des $= 0$ gesetzten Radicanden ist aber folgende: für jeden der vier (reellen) Wurzelwerte fallen die zwei durch das Doppelzeichen angezeigten Werte von y in einen zusammen, d. h. wenn α ein Wurzelwert des Radicanden ist, so berührt die Gerade $x = \alpha$ die Kurve in $y = -\frac{e}{2\alpha}$. Die durch die Gleichung I. vorgestellte Kurve hat daher im Allgemeinen ausser der y-Axe, welche Asymptote ist, noch vier Tangenten parallel der y-Axe.

Hat der $= 0$ gesetzte Radicand zwei gleiche Wurzelwerte $x = \alpha$, so ist der Punkt $x = \alpha$, $y = -\frac{e}{2\alpha}$ entweder ein Doppelpunkt oder ein isolierter Punkt der Kurve, je nachdem zwei von α sehr wenig verschiedene Werte $\alpha + \delta$ und $\alpha - \delta$ den Radicanden beidemal positiv oder beidemal negativ machen. Denn der Radicand hat unter der gemachten Voraussetzung die Form $(x - \alpha)^2 (x - \beta) (x - \gamma)$, wenn β und γ die zwei weiteren Wurzelwerte bedeuten. Dieser Ausdruck ist $= 0$ für $x = \alpha$, und $= \delta^2 (\alpha \pm \delta - \beta) (\alpha \pm \delta - \gamma)$ wenn man für x die Werte $\alpha \pm \delta$ setzt. Der letztgenannte Ausdruck ist aber, da δ sehr klein gegenüber von α, β, γ angenommen ist, positiv oder negativ, je nachdem $(\alpha - \beta) (\alpha - \gamma)$ positiv oder negativ ist. Im ersten Fall erhält man also zwei reelle, wegen des Faktors δ^2 nur wenig von einander verschiedene, Werte von y sowohl für $x = \alpha + \delta$ als für $x = \alpha - \delta$, während es für $x = \alpha$ nur einen Wert von y giebt, d. h. mit anderen Worten, der Punkt $x = \alpha$, $y = -\frac{e}{2\alpha}$ ist ein Doppelpunkt. Wenn aber $(\alpha - \beta) (\alpha - \gamma)$ negativ ist, erhält man für y zwei imaginäre Werte, sowohl wenn man $x = \alpha + \delta$, als wenn man $x = \alpha - \delta$ setzt, während für $x = \alpha$ der reelle Wert $y = -\frac{e}{2\alpha}$ stattfindet, d. h. der Punkt $x = \alpha$, $y = -\frac{e}{2\alpha}$ ist ein isolierter Punkt.

Hat aber der $= 0$ gesetzte Radicand drei gleiche Wurzelwerte, oder ist er von der Form $(x - \alpha)^3 (x - \beta)$, so wird für $x = \alpha + \delta$ der Wert des Radicanden $= \delta^3 (\alpha + \delta - \beta)$, welcher, $\alpha > \beta$ vorausgesetzt, positiv ist, dagegen für $x = \alpha - \delta$ erhält man $-\delta^3 (\alpha - \delta - \beta)$, also einen negativen Wert. Die entsprechenden Werte von y werden daher für $x = \alpha + \delta$ reell und wegen des kleinen Faktors δ^3 sehr wenig verschieden, dagegen für $x = \alpha - \delta$ imaginär. Gerade umgekehrt ist es, wenn $\alpha < \beta$ voraus-

gesetzt wird. Daraus folgt aber, dass der Punkt $x = \alpha$, $y = -\frac{e}{2\alpha}$ ein Rückkehrpunkt der Kurve ist.

Indem auf die angegebene Weise bei jeder der angeführten Gruppen die Anzahl der möglichen Fälle hinsichtlich der Wurzeln des betreffenden Radicanden untersucht wird, ergeben sich *Newtons* 65 Spezies des ersten Hauptfalls. *)

4. Was die übrigen drei Hauptfälle der Gleichungen der Linien III. Ordnung betrifft, so repräsentiert der zweite Hauptfall:

$$\text{II.} \quad xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

nur eine einzige Spezies, die sogenannte Tridenskurve.

Der dritte Hauptfall:

$$\text{III.} \quad y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

giebt die fünf divergierenden Parabeln, weil sich hinsichtlich der Wurzeln der Gleichung:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

fünf Fälle unterscheiden lassen.

Endlich der vierte Hauptfall:

$$\text{IV.} \quad y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

enthält wie der zweite nur eine einzige Spezies, die sogenannte kubische Parabel.

Hiemit beträgt die Anzahl sämtlicher Spezies der Linien III. Ordnung bei *Newton* 72.

5. So originell und scharfsinnig auch die *Newton* sche Einteilung der Linien III. Ordnung entworfen ist, so kann man in derselben doch mehr nur eine „Aufzählung“, wie schon ihr Titel „Enumeratio“ andeutet, als eine prinzipielle Einteilung erkennen. Geht man von der allgemeinen Gleichung dritten Grades zwischen den Veränderlichen x und y aus, so liegt es am Nächsten, die Anzahl der Asymptoten der durch diese Gleichung vorgestellten Kurven und die gegenseitige Lage dieser Asymptoten zu untersuchen und demgemäss die Kurven zu gruppieren. Dies ist der Weg, welchen ausser *Newton* im Wesentlichen auch *Euler* und selbst *Plücker* (welcher ausser geradlinigen Asymptoten auch noch parabolische Asymptoten in Betracht zieht) eingeschlagen haben. Sieht man aber als wesentliches Prinzip der Einteilung die Kollineation an, d. h. rechnet man

---

*) Es ist schon früher in Art. 46 bemerkt worden, dass *Newton* 6 Spezies übersehen hat und zwar je 2 bei den Gruppen A) b), A) c) und D) b).

alle diejenigen Formen einer algebraischen Linie einer bestimmten Ordnung als zu einer Gattung gehörig, welche durch Projektion ineinander übergehen können, so kann man die auf die Asymptoten und also auf die unendlich fernen Punkte sich beziehenden Eigenschaften einer Kurve nicht als wesentliche Eigenschaften derselben erkennen und auf sie die Haupteinteilung gründen, da durch Projektion der Kurve auf eine andere Ebene die Punkte, welche ursprünglich unendlich ferne lagen, in den endlichen Raum fallen. Dagegen sind es die Wendepunkte, resp. Doppel- und Rückkehrpunkte, und isolierte Punkte, deren Vorhandensein durch Projektion der Kurve auf andere Ebenen nicht alteriert wird und einen obersten Grund für die Einteilung ergiebt. Dass übrigens dieser Gesichtspunkt, welcher in dieser Bestimmtheit zuerst von *Möbius* dargelegt wurde, auch *Newtons* grossem Geist nicht fremd war, beweist sein ausgezeichneter, leider ohne Beweis ausgesprochener, Satz über die Projektion der fünf divergierenden Parabeln, welcher stets den Kardinalsatz für eine Einteilung der Linien III. Ordnung bilden wird.

Beilage.

Da die auf synthetischem Weg gefundenen sechsundneunzig Spezies der Linien III. Ordnung unter Berücksichtigung der in Art. 46. erklärten Differenz sich auch bei *Newton* finden, so soll noch angeführt werden, wie sich die Gleichungen der einzelnen Spezies unter die von *Newton* aufgestellten Gleichungen verteilen.

Da *Newton* bei dem ersten Hauptfall fünf Gruppen unterscheidet und bei jeder derselben wieder ob die Kurve einen (resp. drei) Durchmesser hat oder nicht (vergl. Anhang Art. 2), so wollen wir bei dem ersten Hauptfall zehn Gleichungen aufstellen, wozu dann noch die drei Gleichungen der drei übrigen Hauptfälle kommen, so dass wir im Ganzen dreizehn verschiedene Gleichungen bekommen, unter welche sich die einzelnen Spezies unterordnen lassen.

$$\text{I.} \quad xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

wobei a als positive Zahl vorausgesetzt ist.

Hierher gehören die eilf Spezies:

1, 5, 20, 33, 35, 49, 59, 69, 72, 74, 88.

Bei 1 sind die vier Wurzeln der Gleichung:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{e^2}{4} = 0$$

sämtlich reell, verschieden und mit demselben Vorzeichen behaftet.

Bei 5 sind zwei Wurzeln positiv und zwei negativ. (Würde man sämtliche vier Wurzeln imaginär nehmen, so erhielte man eine Kurve derselben Art nur in anderer Lage gegen das Koordinatensystem.)

Bei 20 haben die vier reellen Wurzeln dasselbe Vorzeichen, aber die zwei mittleren sind einander gleich.

Bei 33, 35, 49, 59 sind zwei Wurzeln imaginär, die zwei andern reell und mit demselben Vorzeichen behaftet.*)

Bei 69 haben die vier reellen Wurzeln dasselbe Vorzeichen, aber die zwei kleinsten (oder grössten) sind einander gleich.

Bei 72 und 74 sind zwei der vier reellen Wurzeln einander gleich und die andern haben das entgegengesetzte Vorzeichen von den zwei ersten. Bei 72 ist b positiv, bei 74 aber negativ.

Bei 88 haben die vier reellen Wurzeln dasselbe Vorzeichen, aber drei derselben sind einander gleich.

Hiemit sind alle möglichen Fälle, welche hinsichtlich der vier Wurzeln stattfinden können, wenigstens soweit sie hier in Betracht kommen, erschöpft. Denn da $\frac{e^2}{4a}$ wesentlich positiv ist und das Produkt der vier Wurzeln vorstellt, so sind im Voraus die Fälle ausgeschlossen, wo von den vier reellen Wurzeln drei positiv sind und eine negativ (oder umgekehrt), oder wo zwei Wurzeln reell und von verschiedenen Vorzeichen sind und die zwei andern imaginär oder auch reell und gleich sind. Ebenso sind die Fälle ausgeschlossen, wo zweimal zwei gleiche Wurzeln oder auch vier gleiche Wurzeln vorhanden sind, denn in diesem Fall würde die Gleichung I. zerfallen in die Gleichungen einer Geraden und eines Kegelschnittes.

$$\text{II.} \quad xy^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Hierher gehören die zweiundzwanzig Spezies:

9, 10, 11, 15, 17, 26, 27, 28, 40, 42, 43, 44, 46, 54, 55, 56, 64, 66, 77, 79, 81, 92.

Von den drei Wurzeln der Gleichung:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

sind bei 9, 10, 11 sämtliche reell und von demselben Vorzeichen; diese drei Kurven unterscheiden sich durch die Relation $b^2 \lessgtr 4ac$.

Bei 15 und 17 sind zwei Wurzeln negativ und eine positiv.

Bei 26, 27, 28 sind die zwei kleineren der drei reellen und mit demselben Vorzeichen behafteten Wurzeln einander gleich; diese drei Spezies unterscheiden sich durch die Relation $b^2 \lessgtr 4ac$.

Bei 40, 42, 43, 44, 46, 54, 55, 56 sind zwei der drei Wurzeln

---

*) Diese vier Spezies unterscheiden sich hinsichtlich der Art der Wurzeln der fraglichen Gleichung IV. Grades nicht. Über ihren geometrischen Unterschied vergl. Art. 34, a); 36; 37. — Zugleich gelte diese Bemerkung auch für alle folgenden Fälle, wo mehrere Spezies ohne nähere Unterscheidung derselben Gleichung untergeordnet sind.

imaginär und zwar ist bei 40, 42, 54 $b^2 < 4ac$, bei 43 und 55 $b^2 = 4ac$ und bei 44, 46, 56 $b^2 > 4ac$.

Die Species 64 ist ein spezieller Fall von 40, und 66 ein spezieller Fall von 56; es kommt nämlich bei 64 und 66 noch die Relation hinzu $3bd = c^2$.

Bei 77 haben die drei reellen Wurzeln dasselbe Vorzeichen, aber die zwei grösseren sind einander gleich.

Bei 79 und 81 haben zwei gleiche reelle Wurzeln das entgegengesetzte Vorzeichen von der dritten.

Bei 92 sind die drei Wurzeln einander gleich.

III. $xy^2 + ey = ax^3 + cx + d.$

Hierher gehören die vier Spezies:

6, 7, 34, 73.

Bei 6 sind die vier Wurzeln der Gleichung:

$$ax^4 + cx^2 + dx + \frac{e^2}{4} = 0$$

sämtlich reell und verschieden und zwar zwei positiv und zwei negativ (die algebraische Summe der vier Wurzeln ist bei der vorstehenden Gleichung stets der Null gleich).

Bei 7 sind die zwei positiven Wurzeln von den zwei negativen nur durch das Vorzeichen unterschieden und daher $d = 0$.

Bei 34 sind zwei Wurzeln imaginär und zwei reell und von demselben Vorzeichen.

Bei 73 sind von den vier reellen Wurzeln zwei einander gleich und die zwei andern haben das entgegengesetzte Vorzeichen von den zwei gleichen.

IV. $xy^2 = ax^3 + cx + d.$

Hierher gehören die fünf Spezies:

16, 41, 45, 65, 80.

Bei 16 sind die drei Wurzeln der Gleichung:

$$ax^3 + cx + d = 0$$

sämtlich reell und verschieden und zwei haben das entgegengesetzte Vorzeichen der dritten.

Bei 41, 45, 65 sind zwei der drei Wurzeln imaginär und eine reell. Bei 41 ist c positiv, bei 45 ist c negativ und bei 65 $c = 0$.

Bei 80 sind von den drei reellen Wurzeln zwei einander gleich und die dritte hat das entgegengesetzte Vorzeichen der zwei ersten.

V. $xy^2 + ey = -ax^3 + bx^2 + cx + d.$

Hierher gehören die zehn Spezies:

3, 22, 37, 38, 51, 52, 61, 62, 71, 90.

Bei 3 sind die vier Wurzeln der Gleichung:

$$-ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{e^2}{4} = 0$$

sämtlich reell und verschieden und zwar hat eine das entgegengesetzte Vorzeichen der drei andern.

Bei 22 ist von den vier reellen Wurzeln eine positiv und die drei andern negativ und von den letztern die zwei absolut genommen grössten einander gleich.

Bei 37, 38, 51, 52, 61, 62 sind zwei Wurzeln imaginär, zwei reell, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen. Bei 38, 52, 62 sind überdies $b = 0$ und $d = 0$ und daher die beiden reellen Wurzeln absolut genommen einander gleich. Bei 62 ist überdies noch $c = e\sqrt{3a}$.

Bei 71 sind die vier Wurzeln reell, eine negativ und drei positiv und von den letztern die zwei kleinsten einander gleich.

Bei 90 sind von den vier reellen Wurzeln drei einander gleich und die vierte hat das entgegengesetzte Vorzeichen von den drei ersten.

VI. $xy^2 = -ax^3 + bx^2 + cx + d.$

Hierher gehören die neun Spezies:

13, 19, 30, 32, 48, 58, 68, 83, 94.

Bei 13 haben von den drei reellen Wurzeln der Gleichung:

$$-ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

zwei dasselbe und die dritte das entgegengesetzte Vorzeichen.

Bei 19 haben die drei reellen Wurzeln dasselbe Vorzeichen.

Bei 30 sind zwei der drei reellen Wurzeln einander gleich und die dritte hat das entgegengesetzte Vorzeichen von den zwei ersten.

Bei 32 sind ebenfalls zwei Wurzeln einander gleich und zwar die absolut genommen grössten und die dritte hat dasselbe Vorzeichen.

Bei 48, 58, 68 sind zwei der drei Wurzeln imaginär; bei 68 findet die Relation $3bd = c^2$ statt.

Bei 83 haben die drei reellen Wurzeln dasselbe Vorzeichen und die zwei absolut genommen kleineren sind einander gleich.

Bei 94 sind die drei Wurzeln einander gleich.

VII. $xy^2 + ey = bx^2 + cx + d.$

Hierher gehören die neun Spezies:

2, 4, 21, 36, 50, 60, 70, 75, 89.

Bei 2 sind die drei Wurzeln der Gleichung:

$$bx^3 + cx^2 + dx + \frac{e^2}{4} = 0$$

sämtlich reell und mit demselben Vorzeichen behaftet.

Bei 4 haben von drei reellen Wurzeln zwei dasselbe und die dritte das entgegengesetzte Vorzeichen.

Bei 21 haben die drei reellen Wurzeln dasselbe Vorzeichen, aber die zwei absolut genommen grössten fallen zusammen.

Bei 36, 50, 60 sind zwei der drei Wurzeln imaginär.

Bei 70 haben die drei reellen Wurzeln dasselbe Vorzeichen, aber die zwei absolut genommen kleinsten fallen zusammen.

Bei 75 sind ebenfalls zwei der drei Wurzeln einander gleich, aber die dritte hat das entgegengesetzte Vorzeichen von den zwei ersten.

Bei 89 sind die drei Wurzeln einander gleich.

VIII. $xy^2 = bx^2 + cx + d.$

Hierher gehören die acht Spezies:

12, 14, 18, 29, 47, 57, 67, 82.

Bei 12 und 18 sind die beiden Wurzeln der Gleichung:

$$bx^2 + cx + d = 0$$

beide reell und von demselben Vorzeichen und zwar sind, ein positives b vorausgesetzt, bei 12 die beiden Wurzeln negativ, bei 18 positiv.

Bei 14 haben die beiden reellen Wurzeln entgegengesetzte Vorzeichen.

Bei 29 und 82 sind die beiden reellen Wurzeln einander gleich und zwar, ein positives b vorausgesetzt, bei 29 negativ und bei 82 positiv.

Bei 47, 57, 67 sind die beiden Wurzeln imaginär und bei 67 besteht noch die Relation $c^2 = 3bd$.

IX. $xy^2 + ey = cx + d.$

Hierher gehören die sechs Spezies:

23, 24, 84, 85, 86, 95.

Bei 23 sind die beiden Wurzeln der Gleichung:

$$cx^2 + dx + \frac{e^2}{4} = 0$$

reell und von entgegengesetzten Vorzeichen.

Bei 24 sind die beiden reellen Wurzeln absolut genommen gleich, aber von entgegengesetzten Vorzeichen.

Bei 84 haben die zwei reellen Wurzeln dasselbe Vorzeichen.

Bei 85 und 86 sind die beiden Wurzeln imaginär und bei 86 ist zugleich $d = 0$.

Bei 95 ist $c = 0$ und daher nur eine Wurzel vorhanden.

X. $xy^2 = cx + d.$

Hierher gehören die drei Spezies:

31, 78, 93

welche sich dadurch unterscheiden, dass bei ihnen c resp. negativ, positiv oder Null ist.

XI. $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$

Hierher gehören die sieben divergierenden Parabeln:

8, 25, 39, 53, 63, 76, 91.

Transformiert man die Gleichung XI. in die Form:

$$ky^2 = x(x^2 - px + q^2)$$

so sind die drei Wurzeln der Gleichung:

$$x^3 - px^2 + q^2x = 0$$

reell bei 8, 25, 76, und zwar ist bei 8 $p^2 > 4q^2$ und daher die drei Wurzeln verschieden; bei 25 ist $q^2 = 0$ und daher fallen die zwei kleineren Wurzeln zusammen; bei 76 fallen die zwei grösseren Wurzeln zusammen, denn es ist $p^2 = 4q^2$.

Dagegen bei 39, 53, 63 ist $q^2 > \frac{p^2}{4}$, zwei der drei Wurzeln sind imaginär; bei 39 ist zugleich $q^2 < \frac{p^2}{3}$, bei 53 ist $q^2 > \frac{p^2}{3}$ und bei 63 ist $q^2 = \frac{p^2}{3}$.

Endlich bei 91 ist $p = 0$, $q = 0$, die drei Wurzeln der Gleichung fallen in eine zusammen.

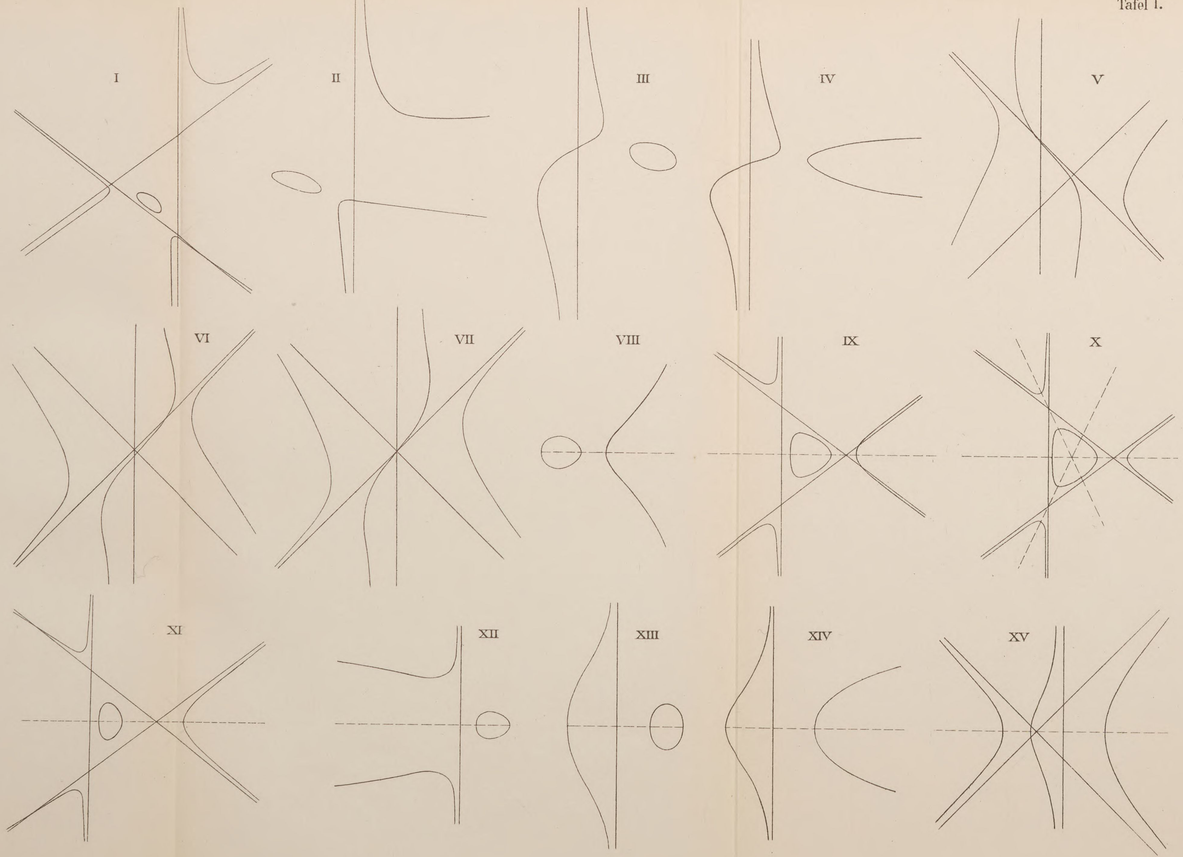
XII. $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d.$

Hierher gehört nur die eine Spezies 87, die sogenannte Tridenskurve, deren Gleichung in die bequemere Form: $x^3 + \beta xy + \gamma^3 = 0$ transformiert werden kann.

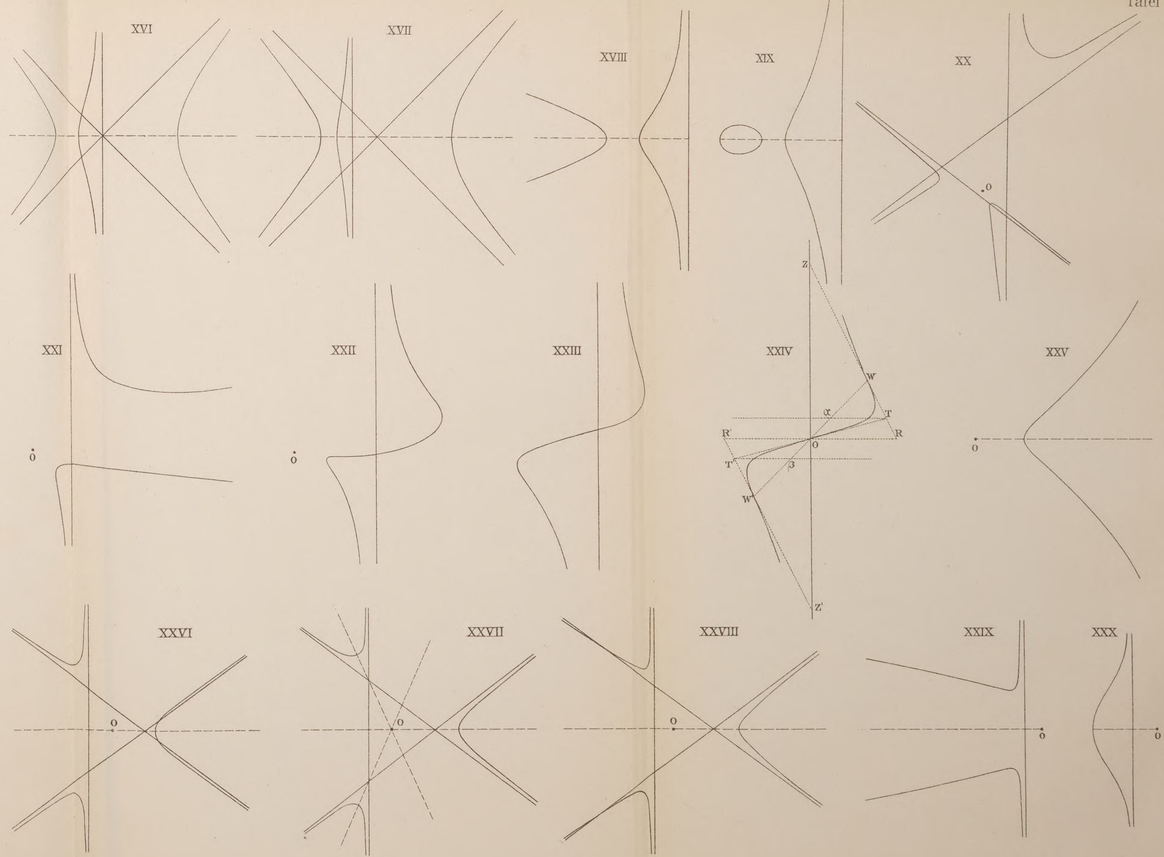
XIII. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$

Auch hierher gehört nur die einzige Spezies 96, die kubische Parabel, deren Gleichung gewöhnlich in der Form $\gamma^2 y = x^3$ angegeben wird.

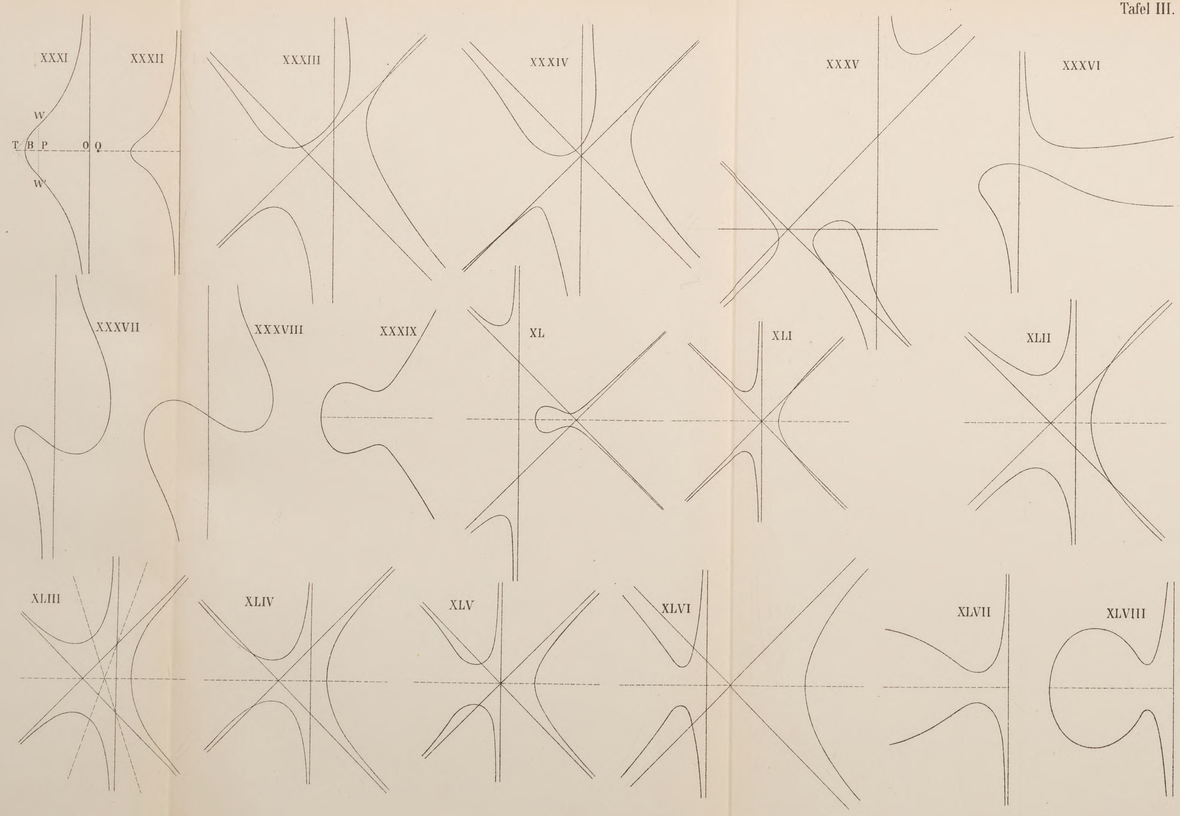
Tafel I.



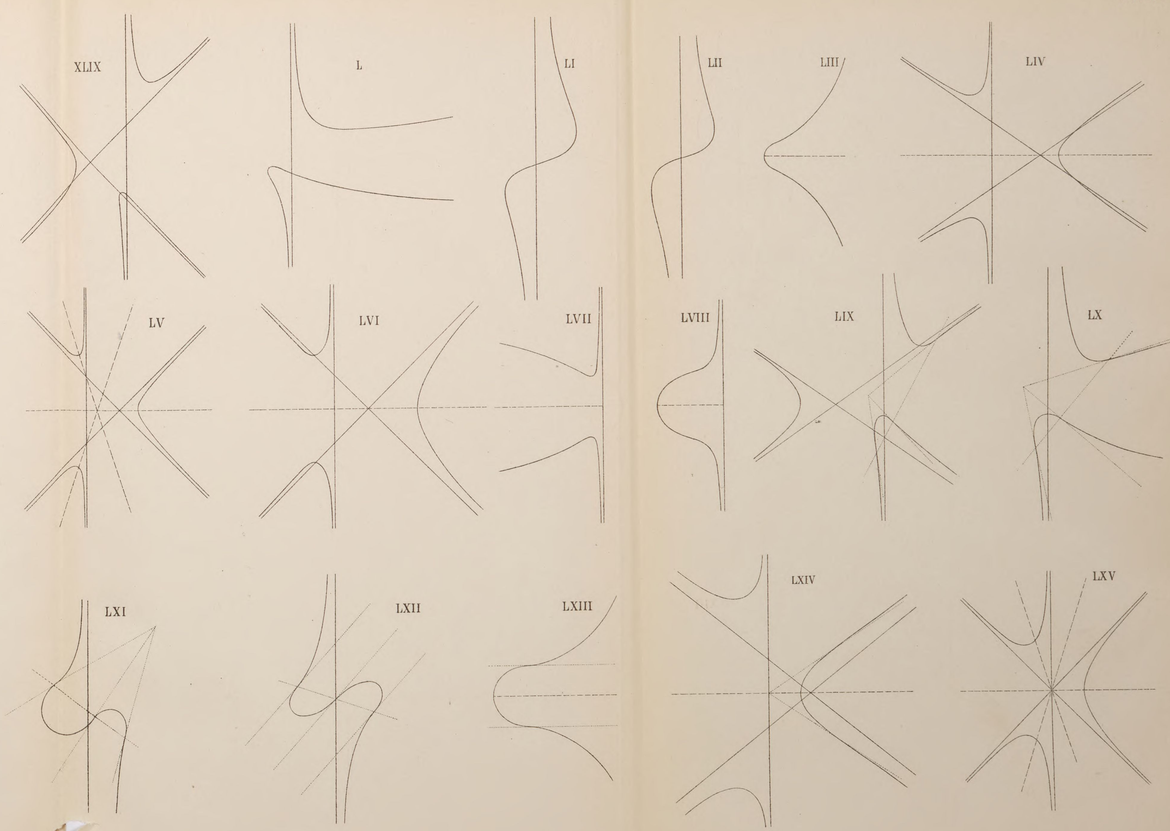
Tafel II.



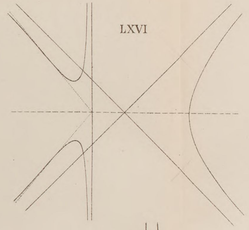
Tafel III.



Tafel IV.

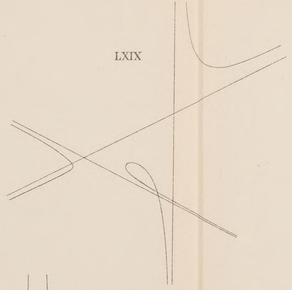


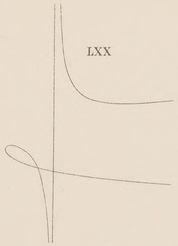
Tafel V.


LXVI

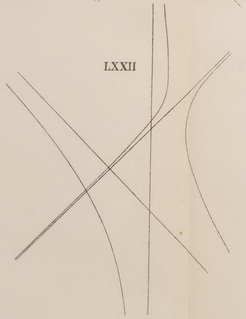
LXVII

LXVIII

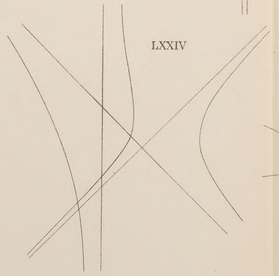

LXIX

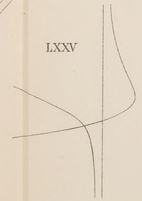

LXX

LXXI

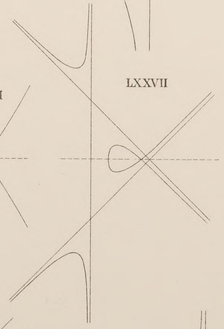

LXXII

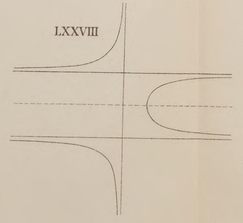
LXXIII

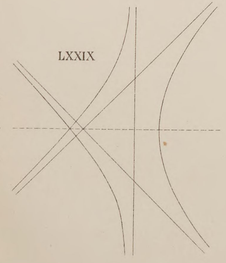

LXXIV

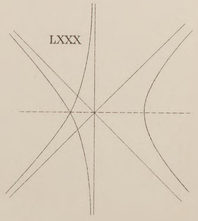

LXXV

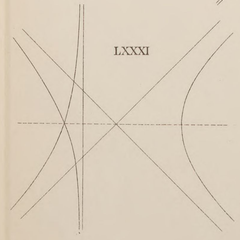
LXXVI


LXXVII


LXXVIII

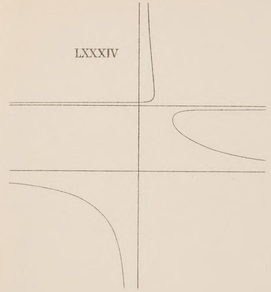

LXXIX

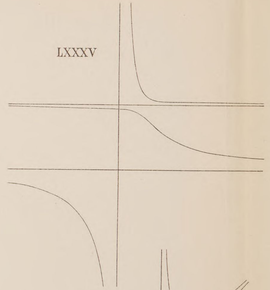

LXXX

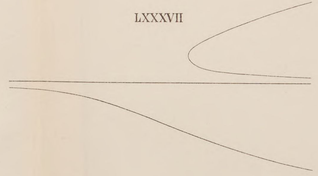

LXXXI

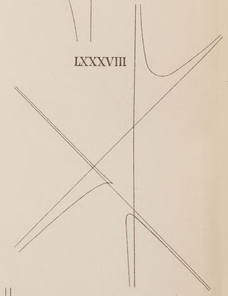
LXXXII

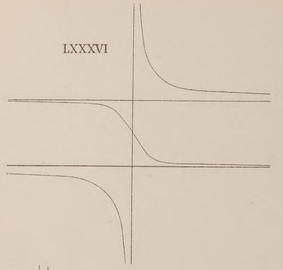
LXXXIII


LXXXIV

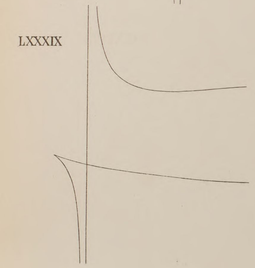

LXXXV


LXXXVII

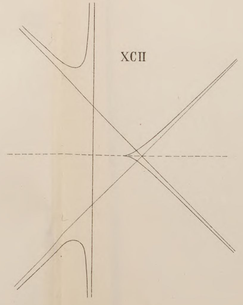

LXXXVIII

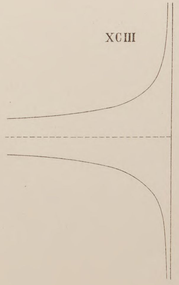

LXXXVI

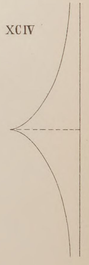
XCI

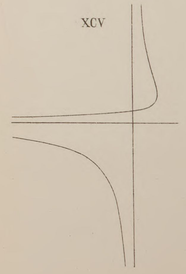

LXXXIX

XC


XCII


XCIII


XCIV


XCV

XCVI

Tafel VI.

Neue Mathematica des **J. B. Metzler**schen Verlages in Stuttgart.

Beyel, Chr., Axonometrie und Perspektive in systematischem Zusammenhange dargestellt. gr. 8°. Mit 9 lithogr. Tafeln. 2 ℳ. 40 ₰.

Bohnenberger, Berechnung der trigonometrischen Vermessungen. Aus dem Lateinischen übersetzt von E. Hammer. gr. 8°. 1 ℳ. 80 ₰.

Gugler, Bernh., Lehrbuch der deskriptiven Geometrie. Mit 12 Kupfertafeln und 21 Holzschnitten im Text. Vierte Auflage. 8°. 8 ℳ.

— — **Leitfaden** für den Unterricht in der **descriptiven Geometrie.** Mit 2 Kupfertafeln. Zweite Auflage. 8°. 2 ℳ.

Hammer, E., Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie mit Anwendungen auf praktische Geometrie und sphärische Astronomie und zahlreichen Übungsbeispielen. 8°. 3 ℳ. 20 ₰.

— — **Über den Verlauf der Isogonen im mittleren Württemberg.** Mit 6 Figuren im Text, 1 Karte und 3 Tafeln. gr. 8°. 2 ℳ. 80 ₰.

Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. In zwei Bänden. Mit zahlreichen Holzschnitten. gr. 8°. 24 ℳ.

— — **Hülfstafeln für Tachymetrie.** gr. 8°. 8 ℳ. Dieselben mit französischem Text. 8 ℳ.

— — **Barometrische Höhentafeln.** Zweite bis 35° erweiterte Auflage. Mit 3 Seiten Text. gr. 8°. 2 ℳ. 40 ₰.

Kraft, Ferdinand, Sammlung von Problemen der analytischen Mechanik. gr. 8°. 2 Bände. 22 ℳ. (I. Band 12 ℳ., II. Band 10 ℳ.) Auch in 11 Lieferungen à 2 ℳ. zu beziehen.

Reuschle, C., Die Deck-Elemente. Ein Beitrag zur deskriptiven Geometrie. Mit Tafel. 8°. 1 ℳ. 40 ₰.

— — **Graphisch-mechanische Methode zur Auflösung der numerischen Gleichungen.** 8°. 1 ℳ. 50 ₰.

— — **Graphisch-mechanischer Apparat zur Auflösung der numerischen Gleichungen.** In Mappe mit Text. Folio. 2 ℳ. 80 ₰. Französische Ausgabe 3 ℳ. 60 ₰.

— — **Praxis der Kurven-Diskussion.** I. Teil: Kurven-Diskussion in Punkt-Koordinaten mit einem Anhang über analytisch-geometrische Prinzipien. 8°. 3 ℳ. 80 ₰.

Rex, F. W., Vierstellige Logarithmentafeln. In ganz weiche Leinwand gebunden. gr. 8°. 1 ℳ. 20 ₰.

— — Kleine Schulausgabe. Cart. gr. 8°. 60 ₰.

— — **Fünfstellige Logarithmentafeln.** gr. 8°. In 2 Heften à 1 ℳ. 30 ₰.

I. Tafel I—III. Die Logarithmen der Zahlen und der goniometrischen Functionen. 1 ℳ. 30 ₰.

II. Tafel IV—XI. Die Additions- und Subtractionslogarithmen; Logarithmen der Werthe $\frac{1+x}{1-x}$; Nepersche Logarithmen etc. 1 ℳ. 30 ₰.

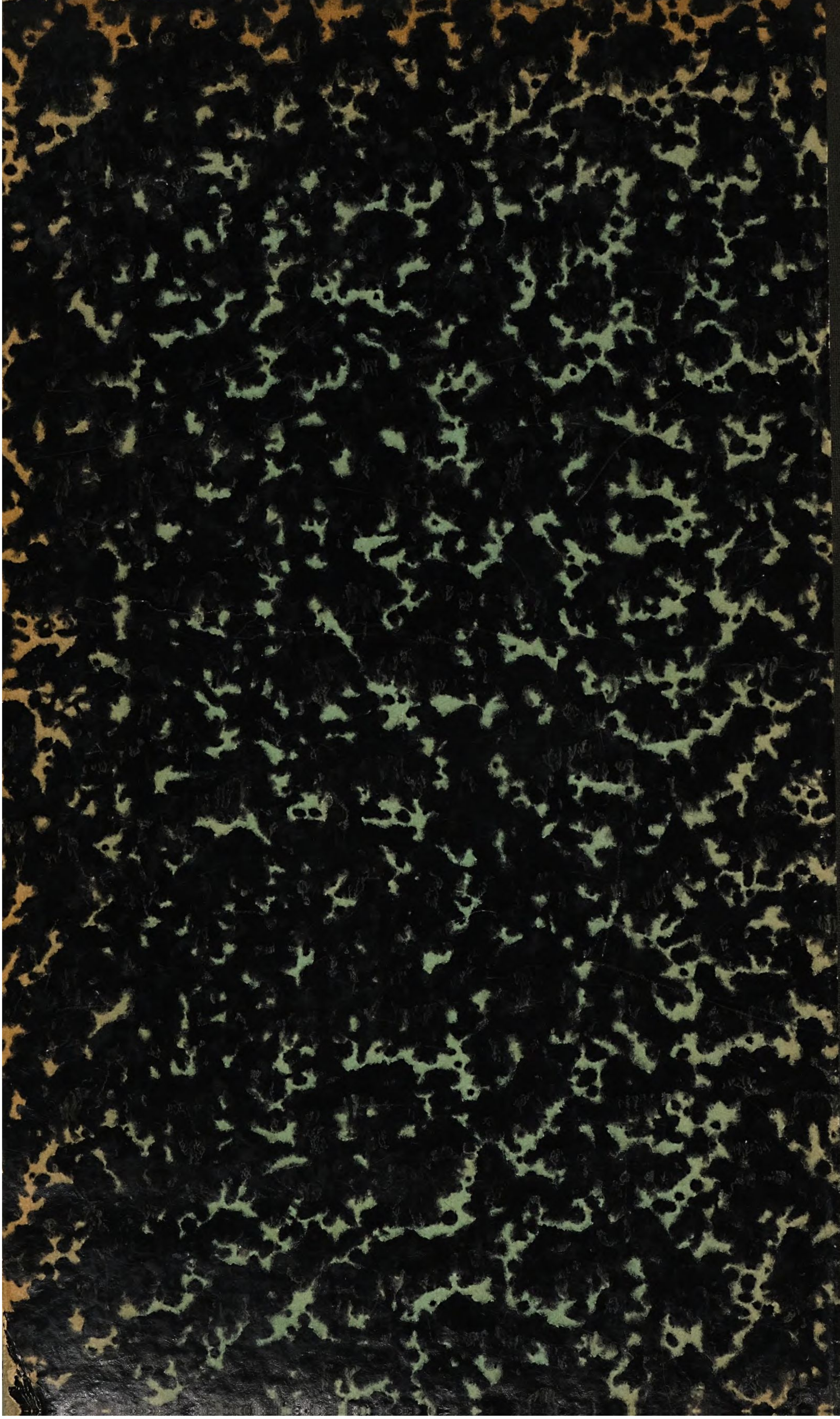
— — Französische Ausgabe unter dem Titel: Tables de Logarithmes à cinq décimales. 2 Hefte. gr. 8°. à 2 ℳ.

Riess, C., Schattierungskunde. Mit 10 Figuren im Text und 3 Figuren-Tafeln. gr. 8°. 1 ℳ. 50 ₰.

Taschenbuch der praktischen Geometrie. Herausgegeben vom Ingenieurverein Stuttgart. Zweite vermehrte Auflage. 8°. 4 ℳ.

Tissot, A., Die Netzentwürfe geogr. Karten nebst Aufgaben über Abbildung beliebiger Flächen aufeinander. Autorisierte deutsche Bearbeitung mit einigen Zusätzen besorgt von E. Hammer. Mit 30 Holzschnitten und 55 Seiten Zahlentafeln. gr. 8°. 5 ℳ.

Werz.



BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Baur, Moritz

Synthetische Einteilung der ebenen Linien 3. Ordnung

Stuttgart 1888
Math.p. 25 ud
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11650679-7